



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

ÚSTAV POČÍTAČOVÉ GRAFIKY A MULTIMÉDIÍ

DEPARTMENT OF COMPUTER GRAPHICS AND MULTIMEDIA

NOVÉ TRANSFORMACE PRO FORMÁT JPEG

NEW TRANSFORMS FOR JPEG FORMAT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

STANISLAV SVOBODA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. DAVID BAŘINA, Ph.D.

BRNO 2017

Vysoké učení technické v Brně - Fakulta informačních technologií

Ústav počítačové grafiky a multimédií

Akademický rok 2016/2017

Zadání bakalářské práce

Řešitel: **Svoboda Stanislav**

Obor: Informační technologie

Téma: **Nové transformace pro formát JPEG**

New Transforms for JPEG Format

Kategorie: Zpracování obrazu

Pokyny:

1. Seznamte s metodami ztrátové komprese obrazu a s formátem JPEG. Zaměřte se na DCT.
2. Popište vhodné alternativní transformace, které by mohly DCT v JPEGu nahradit.
3. Implementujte knihovnu nebo modifikujte některou stávající knihovnu pro kompresi a dekompresi formátu JPEG tak, aby byla umožněna volba použité transformace.
4. Vyhodnoťte účinnost komprese (kvalita při daném kompresním poměru) s různými transformacemi.
5. Diskutujte nad dosaženými výsledky, vhodností užití jednotlivých metod a možnostmi případného pokračování práce.

Literatura:

- ITU T.81 (<http://www.itu.int/rec/T-REC-T.81>)

Pro udělení zápočtu za první semestr je požadováno:

- Body 1 a 2. Funkční prototyp z bodu 3.

Podrobné závazné pokyny pro vypracování bakalářské práce naleznete na adrese

<http://www.fit.vutbr.cz/info/szz/>

Technická zpráva bakalářské práce musí obsahovat formulaci cíle, charakteristiku současného stavu, teoretická a odborná východiska řešených problémů a specifikaci etap (20 až 30% celkového rozsahu technické zprávy).

Student odevzdá v jednom výtisku technickou zprávu a v elektronické podobě zdrojový text technické zprávy, úplnou programovou dokumentaci a zdrojové texty programů. Informace v elektronické podobě budou uloženy na standardním nepřepisovatelném paměťovém médiu (CD-R, DVD-R, apod.), které bude vloženo do písemné zprávy tak, aby nemohlo dojít k jeho ztrátě při běžné manipulaci.

Vedoucí: **Bařina David, Ing., Ph.D., UPGM FIT VUT**

Datum zadání: 1. listopadu 2016

Datum odevzdání: 17. května 2017

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií
Ústav počítačové grafiky a multimédií
602 00 Brno, Božetěchova 2



doc. Dr. Ing. Jan Černocký
vedoucí ústavu

Abstrakt

Diskrétní kosinová transformace je často používána v mnoha algoritmech při zpracování signálu. Tato transformace je také jádrem standardu JPEG, který je dosud nejpoužívanější formát pro ztrátovou kompresi obrazových dat. Od doby standardizace JPEGu byla publikována spousta dalších transformací, které se chovají obdobně jako diskretní kosinová transformace. Cílem této práce je analyzovat využití těchto transformací v kompresním řetězci JPEGu. Každá transformace je zkoumána na základě její aplikace na datové sadě různých druhů obrázků a následného porovnání vůči ostatním transformacím za použití metriky PSNR a SSIM. Z měření vyplývá, že varianta DCT s přesahem bloku, lokální diskretní kosinová transformace, má lepší výsledky při nižším datovém toku než diskretní kosinová transformace. Při vyšším datovém toku má vlnková transformace Cohen-Daubechies-Feauveau 9/7 přibližně shodné výsledky s DCT.

Abstract

The discrete cosine transform (DCT) can be found in the heart of many image compression algorithms. Specifically, the JPEG format uses a lossy form of compression based on that transform. Since the standardization of the JPEG, many other transforms become practical in lossy data compression. This article aims to analyze the use of these transforms as the DCT replacement in the JPEG compression chain. Each transform is examined for different image datasets and subsequently compared to other transforms using the peak signal-to-noise ratio (PSNR) and SSIM. Our experiments show that an overlapping variation of the DCT, the local cosine transform (LCT), overcame the original block-wise transform at low bitrates. At high bitrates, the discrete wavelet transform employing the Cohen–Daubechies–Feauveau 9/7 wavelet offers about the same compression performance as the DCT.

Klíčová slova

JPEG, ztrátová komprese obrazu, diskretní kosinová transformace, diskretní vlnková transformace, Walshova-Hadamardova transformace, diskretní Chebyshevova transformace

Keywords

JPEG, lossy image compression, discrete cosine transform, discrete wavelet transform, Walsh-Hadamard transform, discrete Chebyshev transform

Citace

SVOBODA, Stanislav. *Nové transformace pro formát JPEG*. Brno, 2017. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce Ing. David Bařina, Ph.D.

Nové transformace pro formát JPEG

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením pana Ing. Davida Bařiny, Ph.D. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

.....
Stanislav Svoboda
17. května 2017

Poděkování

Moje velké díky patří mému vedoucímu práce panu Ing. Davidu Bařinovi, Ph.D. za odborné vedení, rady a podněty k mojí práci. A dále všem, kteří moje snažení podporovali.

Obsah

1	Úvod	4
2	JPEG Transformace	5
2.1	JPEG	5
2.2	Diskrétní trigonometrické transformace	7
2.3	Diskrétní vlnková transformace	14
2.4	Polynomialní transformace	21
2.5	Walshova-Hadamardova transformace	23
2.6	Mapped real transformace	24
3	Výsledky transformací	27
3.1	Diskrétní trigonometrické transformace	28
3.2	Diskrétní vlnkové transformace	31
3.3	Polynomiální transformace	33
3.4	Walshova-Hadamardova a mapped real transformace	34
4	Shrnutí výsledků	36
5	Závěr	39
	Literatura	40

Seznam obrázků

2.1	Schéma JPEG kodéru.	6
2.2	DST báze.	8
2.3	DCT báze.	8
2.4	Koeficienty DCT transformace na blocích 8×8	8
2.5	Koeficienty LDCT transformace na blocích 8×8	9
2.6	Znázornění operace skládání.	10
2.7	Aproximace LODCT 1D schéma.	11
2.8	Koeficienty DST transformace na blocích 8×8	12
2.9	Referenční obrázek.	13
2.10	Koeficienty DHT transformace na blocích 8×8	13
2.11	Přeuspořádání koeficientů DHT.	14
2.12	Báze DHT.	14
2.13	Báze DHT (modifikovaná).	14
2.14	Koeficienty CDF 5/3 transformace na blocích 8×8	15
2.15	Koeficienty CDF 9/7 transformace na blocích 8×8	15
2.16	CDF 5/3 báze.	16
2.17	CDF 9/7 báze.	16
2.18	Bitová reverze indexů.	17
2.19	Lifting schéma pro CDF 5/3.	17
2.20	Koeficienty CDF 5/3.	17
2.21	Lifting schéma pro CDF 9/7.	17
2.22	Koeficienty CDF 9/7.	17
2.23	Koeficienty modifikované CDF 5/3 transformace na blocích 8×8	18
2.24	Koeficienty modifikované CDF 9/7 transformace na blocích 8×8	18
2.25	Výsledná matice koeficientů separabilní DWT.	19
2.26	Výsledná matice koeficientů modifikace separabilní DWT.	19
2.27	Koeficienty CDF 5/3 red-black transformace na blocích 8×8	19
2.28	Koeficienty CDF 9/7 red-black transformace na blocích 8×8	20
2.29	Horizontálně vertikální lifting.	20
2.30	Diagonální lifting.	20
2.31	CDF 5/3 red-black báze.	21
2.32	CDF 9/7 red-black báze.	21
2.33	DChT báze.	21
2.34	Rovnice pro výpočet p-tého řádu Chebyshevových polynomů	22
2.35	Koeficienty DChT transformace na blocích 8×8	22
2.36	WHT báze.	23
2.37	Koeficienty WHT transformace na blocích 8×8	24
2.38	Tabulka převodu MRT koeficientů na modifikovanou SMRT.	25

2.39	Báze SMRT (modifikace).	26
2.40	Koeficienty SMRT transformace na blocích 8×8 .	26
3.1	Ukázky obrázků z prvního setu.	27
3.2	Ukázky obrázků z druhého setu.	27
3.3	Porovnání trigonometrických transformací na reálných obrázcích (PSNR).	28
3.4	Porovnání trigonometrických transformací na umělých obrázcích (PSNR).	28
3.5	Diskrétní sinová transformace - artefakty.	29
3.6	Lokální DCT - blokové artefakty.	29
3.7	Porovnání trigonometrických transformací na reálných obrázcích (SSIM).	30
3.8	Ukázky tvorby artefaktů u trigonometrických transformací.	30
3.9	Porovnání artefaktů na hranách objektů u (ne)separabilní CDF 9/7.	31
3.10	Porovnání (ne)separabilní CDF 5/7 a 9/7 na reálných obrázcích (PSNR).	32
3.11	Porovnání (ne)separabilní CDF 5/7 a 9/7 na umělých obrázcích (PSNR).	32
3.12	Porovnání separabilní a modifikované CDF 5/7 a 9/7 na reálných obrázcích (PSNR).	32
3.13	Porovnání separabilní a modifikované CDF 5/7 a 9/7 na umělých obrázcích (PSNR).	32
3.14	Vlnkové transformace - blokové artefakty.	33
3.15	Tvorba artefaktů u vlnkových transformací CDF 5/3.	33
3.16	Tvorba artefaktů u vlnkových transformací CDF 9/7.	33
3.17	Porovnání (ne)separabilní CDF 5/7 a 9/7 na reálných obrázcích (SSIM).	34
3.18	Porovnání separabilní a modifikované CDF 5/7 a 9/7 na reálných obrázcích (SSIM).	34
3.19	Porovnání DCT a DChT s datasetem obsahujícím reálné obrázky.	34
3.20	Porovnání DCT a DChT s datasetem obsahujícím umělé obrázky.	34
3.21	Ukázky tvorby artefaktů u DChT, SMRT a WHT.	35
4.1	Shrnutí s datasetem obsahujícím reálné obrázky.	36
4.2	Shrnutí s datasetem obsahujícím umělé obrázky.	37
4.3	Ukázka hodnot datového toku pro některé úrovně PSNR s datasetem obsahujícím reálné obrázky.	38
4.4	Shrnutí s datasetem obsahujícím reálné obrázky za pomoci metriky SSIM.	38

Kapitola 1

Úvod

Téma nové transformace pro JPEG jsem si vybral z důvodu, že mě obor grafiky a oblasti s tím spojené velice zajímají a rád bych v tomto oboru navázal v další svojí činnosti.

Jelikož v dnešní době roste potřeba po co nejkvalitnějších fotografiích, tak roste i potřeba po efektivním uskladnění dat. A proto je důležité, co nejvíce zkomprimovat data se zachováním kvality obrazu. Například při přenosu velkého počtu fotek s velkým rozlišením přes internet by byl bez určité úrovně komprese časově velice náročný, nehledě na velikost zabraného místa na disku.

Metody komprese obrazu jsou buď ztrátové, kdy dochází k určité ztrátě méně důležitých informací nebo bezztrátové, kde jsou zachována všechna data. Dále se v práci zabývám pouze ztrátovou kompresí dat. JPEG z roku 1991 je dnes stále nejpoužívanější formát pro ztrátovou kompresi obrazu. Na Obrázku 2.1 je zobrazeno zjednodušené blokové schéma komprese obrazu standardem JPEG. JPEG zpracovává obraz po blocích 8×8 vzorků a je založen na rozkladu obrazu na planární kosinusoidy. Výhoda kosinusoid spočívá v tom, že dokáží koncentrovat velkou část energie signálu pouze do několika prvních koeficientů a tím je umožněna lepší komprese obrazu.

Od té doby bylo standardizováno několik dalších postupů, ale žádný jej v používanosti nenahradil. Jmenovitě JPEG 2000 [4], který využívá diskrétní vlnkovou transformaci a rozkládá celý obraz bez použití bloků na tzv. vlnky. Výhoda vlnek je, že oscilují pouze v okolí bodu svého výskytu, což poskytuje dobrou prostorovou lokalizaci [8]. Dále JPEG XR [2], [5], jehož jádrem je LBT transformace (lapped biorthogonal transform). Následně formát WebP, který pro kompresi obrazu využívá diskrétní kosinovou transformaci a Walshovu-Hadamardovu transformaci. Formát WebP je založený na formátu VP8 [10]. Z Obrázku 2.1 je vidět, že schéma JPEGu je jednoduché a populární. Bylo by možné do něj implementovat pokročilejší transformace, například výše zmíněné.

Jako rozhraní pro implementaci a testování jsem zvolil již vytvořenou knihovnu libjpeg od Independent JPEG Group ve verzi 9b (17. ledna 2016) pro Unixový operační systém. Tato knihovna je volně dostupná včetně jejich zdrojových kódů, které jsou napsány v jazyce C. Knihovna libjpeg obsahuje JPEG kodek včetně dalších utilit pro zpracování obrazových dat. V rámci této knihovny implementuji jiné transformační metody, které bude možné použít.

V Kapitole 2 je probráno schéma JPEG a poté jsou probrány transformace, které je možno použít ve formátu JPEG. Dále jsou v Kapitole 3 jednotlivé transformace testovány na setu obrázků a hodnoceny vůči referenční DCT transformaci. Testovací set obrázků je složen z přibližně 500 různých obrázků [26], [16] a [28].

Kapitola 2

JPEG Transformace

V této kapitole je nejdříve vysvětlen kompresní řetězec standardu JPEG v potřebné míře detailu. Dále jsou blíže vysvětleny transformace, kterými by bylo možno nahradit diskretní kosinovou transformaci v kompresním řetězci JPEGu. Jelikož JPEG zpracovává obraz po blocích 8×8 a jelikož diskretní kosinová transformace koncentruje důležité informace pouze do několika koeficientů na začátku posloupnosti, bylo nutné nalézt transformace, které se chovají obdobně jako diskretní kosinová transformace nebo je možná jejich modifikace, se kterou je možno tuto transformaci použít v JPEGu. Nejdříve je probrána diskretní kosinová transformace a následovně jsou probrány transformace, které jsou příbuzné s diskretní kosinovou transformací, jako například diskretní sinová transformace a diskretní Hartleyho transformace, tyto transformace jsou dále označovány jako diskretní trigonometrické transformace. Další skupina transformací, která bude probrána jako možná náhrada DCT, jsou vlnkové transformace, konkrétně Cohen-Daubechies-Feauveau 5/3 a 9/7, které jsou mimo jiné použity u nástupce formátu JPEG, ve formátu JPEG 2000. Poté jsou probrány polynomiální transformace, a to diskretní Chebyshevova transformace, která je spjatá s DCT a diskretní Zolotarevovu kosinovou transformaci, která modifikuje stávající diskretní kosinovou transformaci. Na závěr je probrána Walshova-Hadamardova transformace a mapped real transformace. U každé z výše zmíněných transformací jsou kromě popisu zobrazeny báze obrázky, na kterých lze vidět, z čeho je jednotlivá transformace složena. Dále jsou ukázány výsledné koeficienty pro dané vzorky obrazových dat včetně rovnice pro jejich výpočet.

2.1 JPEG

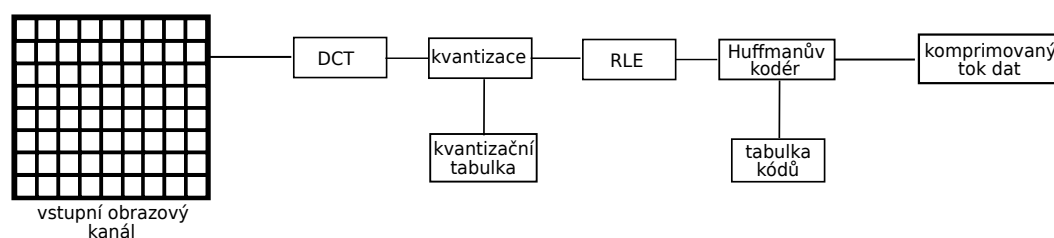
Standard ISO/IEC 10918-1, který bývá běžně označován jako standard JPEG, definuje metodu ztátové komprese obrazu [1]. Komprimovaná data jsou uložena nejčastěji v JFIF nebo EXIF, jež jsou založeny na formátu JIF, který je definován standardem JPEG, ale nebývá příliš využíván. JIF soubory jsou rozděleny do segmentů začínající značkou (markerem) definující obsah segmentů. JFIF rozšiřuje JIF o hlavičku a náhledy.

Standard JPEG je složen ze čtyř postupů [1], [3]. Základní postup umožňuje komprimovat 8bitová vstupní data na každou složku. Vstupní obraz je před konverzí převeden do formátu YCbCr, u kterého mohou být chromatické složky Cb a Cr podvzorkovány (horizontálně i vertikálně), aniž by došlo k velkému viditelnému rozdílu v obraze. Ve většině případů jsou obě chromatické složky škálovány v poměru 4:2:0. Každý kanál obrazu je rozdělen na vzájemně disjunktní bloky 8×8 pixelů, z tohoto důvodu vzniká tzv. blokový efekt, jež se

více projevuje se stoupající úrovní komprese. Blokovému efektu přispívá i podvzorkování chromatických složek. Jestliže velikost šířky či výšky obrazu není násobkem 8, je obraz zvětšen na nejbližší násobek 8 (duplikací posledního řádku či sloupce). Každá hodnota v bloku 8×8 je vycentrována na nulu, tudíž při 8 bitové hodnotě pixelu dojde ke změně intervalu z $\langle 0, 255 \rangle$ na interval hodnot $\langle -128, 127 \rangle$.

Následně je pro každý blok 8×8 spočtena diskrétní kosinová transformace (DCT), jejímž výsledkem je matice 64 koeficientů (matice 8×8). Koeficient v levém horním rohu matice bývá označován jako DC koeficient (stejnoseměrná složka), udávající průměr bloku a zbylých 63 koeficientů jako AC (střídané složky). Výhodou této transformace je, že nejvíce koncentruje energii v blízkosti stejnosměrné složky. Nejvíce energie je soustředěno okolo stejnosměrné složky. Vyšší frekvence mají výskyt na hranách objektu. Tato transformace je invertibilní a nedochází ke ztrátě dat.

Po DCT je provedeno kvantování koeficientů. K tomu je zapotřebí kvantizační tabulka, jež je využívána jak kodérem, tak i dekodérem. Kvantizační tabulka obsahuje hodnoty, kterými je při kvantování podělen odpovídající koeficient DCT transformace. V dekodéru jsou při dekompresi odpovídající data násobena hodnotou v kvantizační tabulce. Změnou hodnot v kvantizační tabulce lze měnit úroveň komprese a tím i ztrátu informace (méně kvalitní obraz). Nejvyšší hodnoty v kvantizační tabulce jsou soustředěny u nejvyšších frekvencí. Při kvantování koeficientů dochází k redukci vysokých frekvencí, které bývají po kvantizaci většinou nulové a tím dochází i ke ztrátě informace. Kvantizační tabulka se používá odlišná pro jasovou složku a pro chromatické složky. Pro nastavení kvality obrazu se mění parametrem kvality q , pomocí kterého dojde k předpočítání všech 64 koeficientů kvantizační tabulky. Po kvantizaci bývá většina DCT koeficientů nulová (vysoké frekvence).



Obrázek 2.1: Schéma JPEG kodéru.

Matice s kvantovanými koeficienty je poté linearizována metodou zig-zag. Průchod zig-zag začíná u koeficientů s nižší frekvencí, jež bývají ve většině případů nenulové, tímto průchodem jsou vysoké frekvence uloženy ke konci řady, tudíž řada obsahuje většinou ke konci posloupnost nul. Posloupnost nul na konci řady se nekóduje, ale namísto toho se za poslední nenulový koeficient vloží symbol EOB. Na tuto linearizovanou posloupnost koeficientů je aplikováno bezztrátové kódování Run-length encoding, které kóduje zvlášť koeficienty DC a AC, což je zapříčiněno tím, že průměrné hodnoty sousedních bloků jsou blízké.

Posledním krokem komprese je Huffmanovo kódování nebo aritmetické kódování. Aritmetické kódování je sice účinnější než Huffmanovo avšak u JPEGu se příliš nepoužívá. Pro kódování DC a AC koeficientů se používají odlišné tabulky Huffmanových kódů. Posloupnost řady AC koeficientů obsahuje pouze málo nenulových koeficientů a mezery mezi nimi jsou vyplněny sledem nul. Tyto sledy nul jsou kódovány metodou RLE. Standard JPEG umožňuje ke kompresi použít až 2 tabulky Huffmanových kódů pro AC koeficienty a 2 tabulky pro DC koeficienty. Tabulku Huffmanových kódů není potřeba mít uloženu v pa-

měti, ale lze hodnotu tabulky spočítat, avšak pro snížení výpočetní náročnosti se většinou používají předpočítané tabulky.

2.2 Diskrétní trigonometrické transformace

Diskrétní trigonometrické transformace [17] jsou široce používané při zpracování a kompresi signálu a obrázků. Příkladem takových transformací je diskrétní kosinová transformace (DCT) a diskrétní sinová transformace (DST). Rodina diskrétních trigonometrických transformací obsahuje osm verzí diskrétní kosinové a osm verzí sinových transformací. Tyto transformace jsou generovány orthogonálními kosinovými, resp. sinovými maticemi. Zvláště DCT-II a k ní inverzní DCT-III se ukázaly být dobře použitelné pro kompresi obrazových dat. Diskrétní trigonometrické transformace našly také významné uplatnění v numerických Fourierových metodách a aproximaci přes Chebyshevovy polynomy.

2.2.1 Diskrétní kosinová transformace

Diskrétní kosinová transformace (DCT) [30] vyjadřuje vstupní signál jako sumu kosinovek s rozdílnými frekvencemi. Tato transformace je často používaná pro zpracování signálů a mimo jiné je DCT použita ve standardu JPEG. DCT přebírá na vstupu posloupnost N hodnot a na výstupu tvoří N DCT transformovaných koeficientů. Koeficienty jsou reálná čísla, i když vstupní hodnoty jsou celá čísla. První koeficient je označován jako DC koeficient a zbytek koeficientů je označován jako AC koeficienty. Hlavní vlastností diskrétní kosinové transformace je, že nejvíce koncentruje energii do pouze několika prvních koeficientů. Nejdůležitější je koeficient DC, který obsahuje nízké frekvence. Ostatní AC koeficienty obsahují méně důležité obrazové informace (vysoké frekvence), které bývají většinou nulové hodnoty nebo nízká čísla. Této vlastnosti se využívá při kvantování koeficientů, kde koeficienty obsahující nižší frekvence jsou zachovány a méně důležité vysoké frekvence jsou ve většině případů po kvantování nulové hodnoty, tímto dochází ke ztrátě obrazových dat. Další důležitá výhoda této transformace je, že umožňuje i použití na vícerozměrný vstupní signál.

Diskrétní kosinová transformace má 8 standardních variant [30]. Jedna z variant, která bývá v literatuře označována jako DCT-II, je využívána při kompresi obrazu. Rovnice pro výpočet i -tého koeficientu diskrétní kosinové transformace (DCT) X_i je dána

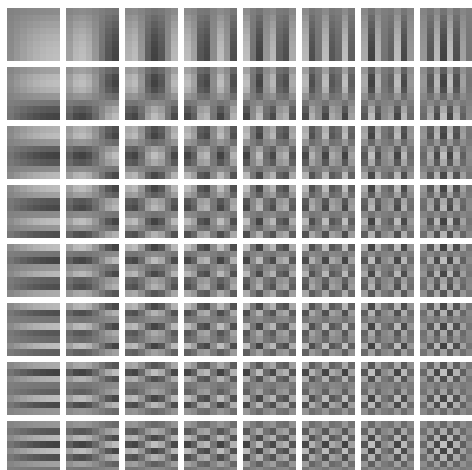
$$X_i = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{4} C(i) x_n \cos\left(\frac{i\pi(2n+1)}{2N}\right), \quad (2.1)$$

kde $C(i)$ je škálovací konstanta, která je vyjádřena

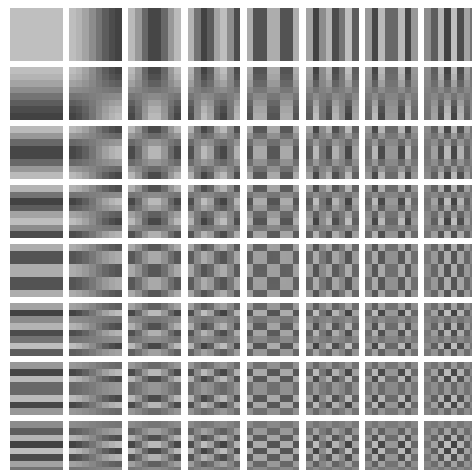
$$C(i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & : i = 0 \\ 1 & : i > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

a x_n jsou vstupní data. Při DCT transformaci je aplikována DCT na každý blok obrazu. Obraz bývá většinou rozdělen na vzájemně disjunktní, stejně velké bloky 8×8 , tato velikost je optimální, jelikož při nižší velikosti bloků nevzniká příliš malých koeficientů, které by šly kvantizovat a při větší velikosti bloků by vznikaly příliš vysoké koeficienty. Nevýhodou tohoto rozdělení je vznik tzv. blokových artefaktů. Po aplikaci 2D DCT se získá matice transformovaných koeficientů ve velikosti opět 8×8 .

Další z variant, která bývá označována jako DCT III, je inverzní k DCT-II [30], a tudíž je využívána při dekompresi obrazu. Na vstupu 2D IDCT je matice koeficientů, opět je použita matice 8×8 . Po aplikaci 2D IDCT je na výstupu matice 8×8 s hodnotami obrazu. Míru kvality lze regulovat při kvantování koeficientů. Pokud by koeficienty nebyly kvantizované, tak by bylo možné rekonstruovat obraz totožný s původním, toho se například využívá při bezztrátové kompresi obrazu.

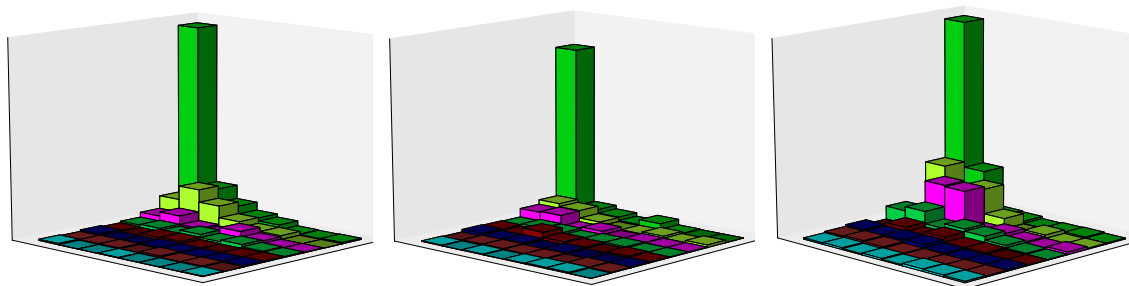


Obrázek 2.2: DST báze.



Obrázek 2.3: DCT báze.

Z vyobrazení bazových funkcí ze vzorku obrazu 8×8 , Obrázek 2.3, lze vidět, že je stejnosměrná složka uložena v levém horním rohu. Od stejnosměrné složky dochází postupně ke zvyšování frekvence. Složky s největší frekvencí jsou soustředěny v pravém dolním rohu. Na základě toho, že je lidské oko méně citlivé na vysokofrekvenční změny, se mohou koeficienty s vysokou frekvencí zanedbat, aniž by došlo k velké ztrátě informace.

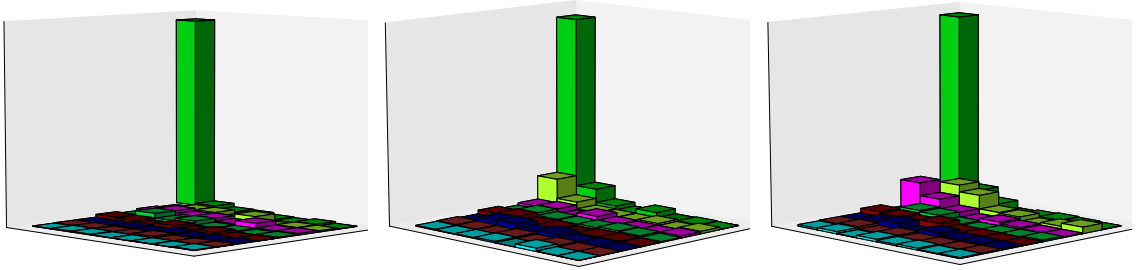


Obrázek 2.4: Koeficienty DCT transformace na blocích 8×8

Z vyobrazení grafů v Obrázku 2.4 lze vidět, jak diskretní kosinová transformace dobře koncentruje energii do levého horního rohu a v oblasti pravého dolního rohu, kde jsou uloženy vysoké frekvence, je možné vidět, že jsou hodnoty nulové nebo se blíží nule.

2.2.2 Lapped DCT

Motivací pro transformace s přesahem byla pro zlepšení vlastností blokových, nepřesahujících transformací pro kompresi signálu [11]. Jelikož báze v blokových transformacích nepřesahují zadaný blok, můžou se zde objevit nespojitosti podél okrajů bloků. Různé aproximace těchto okrajových oblastí na každé straně hrany může způsobit artefakty mezi bloky, tzv. blokové artefakty. Lapped transformace může být obecně definována jako jakákoliv transformace, jejíž bazové vektory přesahují přes obecné hranice bloku. Dochází k přesahu jak do předešlého bloku, tak i do následujícího bloku. Tudíž už transformační matice není čtvercová a většina vztahů, které jsou platné pro blokové transformace, již nejsou použitelné pro lapped transformace. Lapped transformace mají tu výhodu, že umožňují zajistit spojitost na okrajích hranic bloků a tudíž redukuje blokové artefakty.



Obrázek 2.5: Koeficienty LDCT transformace na blocích 8×8

Lokální diskretní kosinová transformace (LDCT) [6] je metoda, která redukuje blokové artefakty. Tato metoda využívá princip přesahu bloků, ale také umožňuje využít variantu DCT-II, která je použita ve standardu JPEG. Báze se skládá z kosinu vynásobeného bellovou funkcí, která přesahuje sousední intervaly. Kosinové funkce, které jsou zde použity, jsou podobné jako bazové funkce DCT-II, tudíž jsou tyto lokální báze nazývány LDCT-II. Násobení bellovou funkcí lze implementovat jako skládání přesahujících částí. LDCT se skládá ze dvou navazujících operací, z předzpracování vstupních dat za pomoci operace skládání a následně je nad těmito daty provedena diskretní kosinová transformace. Inverzní LDCT-II se skládá z inverzní DCT-II a následně za použití operace rozložení, čímž získáme hodnoty původního obrazu. Rovnice pro operaci skládání jsou vyjádřeny

$$f_{-}(i) = \frac{b(i)f(-i) - b(-i)f(i)}{b(i) - b(-i)}, \quad (2.3)$$

$$f_{+}(i) = \frac{b(i)f(i) - b(-i)f(-i)}{b(i) - b(-i)} \quad (2.4)$$

a rovnice pro operaci rozložení

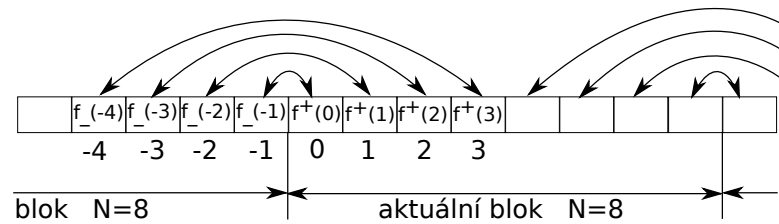
$$f(x) = \begin{cases} b(x)f_{+}(-x) + b(-x)f_{-}(x) & : x \in \langle -4, -1 \rangle \\ b(x)f_{+}(x) + b(-x)f_{-}(-x) & : x \in \langle 0, 3 \rangle \end{cases}, \quad (2.5)$$

kde $f_{-}(i)$ je i -tá hodnota koeficientu nalevo (nahore, pro sloupcový průchod) od hranice bloku, $f_{+}(i)$ je i -tá hodnota koeficientu napravo (dole, pro sloupcový průchod) od hranice bloku a $b(i)$ je bellova funkce, která je vyjádřena

$$b(i) = \beta \left(\frac{i + \frac{1}{2}}{\frac{N}{2}} \right), \quad (2.6)$$

kde $\beta(x)$ je dána

$$\beta(x) = \begin{cases} 0 & : x < -1 \\ \frac{1}{2} (1 + \sin(\frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2} x)))) & : -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & : x > 1 \end{cases} \quad (2.7)$$



Obrázek 2.6: Znázornění operace skládání.

Na Obrázku 2.6 je vyobrazena operace skládání pro 1D signál, při kterém je hodnota na daném indexu spočtena za pomoci hodnoty na protějším indexu ze sousedního bloku. Pro 2D signál je operace skládání aplikována po řádcích a následně po sloupcích.

2.2.3 Aproximace DCT

Ačkoliv rychlé algoritmy mohou značně redukovat výpočetní náročnost výpočtu diskretní kosinové transformace, operace s plovoucí řádovou čárkou jsou stále potřeba [12]. Navzdory jejich přesnosti jsou operace s plovoucí řádovou čárkou výpočetně náročné, proto rychlé algoritmy usilují o minimalizaci počtu těchto operací. Jedním ze způsobů řešení tohoto problému je použití aproximační transformace. Metod aproximací diskretní kosinové transformace je několik (např. Pruned aproximace, Bouguezal-Ahmad-Swamy aproximace, Cintra-Bayer aproximace). Některé DCT aproximace dokáží úplně eliminovat operace s plovoucí řádovou čárkou nebo využívají operace s pevnou řádovou čárkou. Obecně tyto transformace využívají transformační matice, jejichž hodnoty jsou definovány. Jednou z těchto aproximačních metod je pruned DCT aproximace [22]. Obecně je aproximace sestavena pomocí rovnice

$$\hat{C} = S \cdot T, \quad (2.8)$$

kde T je nízko komplexní matice a S je škálovací diagonální matice. Pro transformaci pruned LODCT je použit rychlý algoritmus pro výpočet DCT koeficientů, který je znázorněn na Obrázku 2.7, kde přerušovanou čarou jsou hodnoty vynásobené -1 . Tento algoritmus vyžaduje pouze 18 operací sčítání a 1 operaci posunu. Generováno ze vstupní matice 8×8 je pouze 16 koeficientů (matice 4×4), obsahující pouze nízké frekvence, které jsou uloženy v levém horním rohu výstupní matice, zbytek koeficientů jsou samé nuly. Při inverzní transformaci pruned LODCT jsou vypočítány hodnoty obrázku dle rovnice

$$\hat{A} = \hat{C}_{(4)}^T \cdot B \cdot \hat{C}_{(4)}, \quad (2.9)$$

kde B je matice 4×4 s nízkofrekvenčními koeficienty a $\hat{C}_{(4)}$ je pruned LODCT matice 4×8 , která lze vyjádřit za pomoci

$$\hat{C}_{(4)} = S_{(4)} \cdot W_{(4)}, \quad (2.10)$$

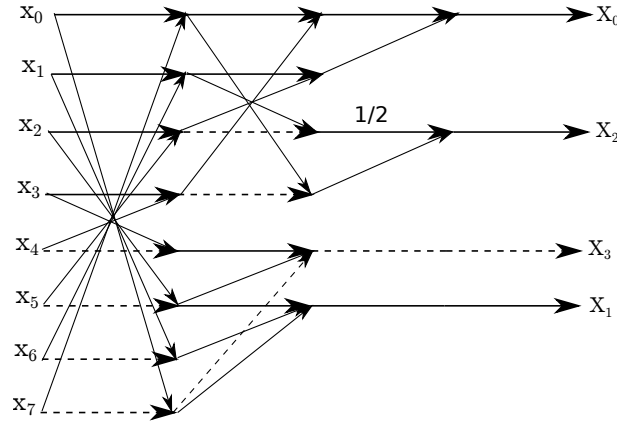
kde $S_{(4)}$ je dána

$$S_{(4)} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.11)$$

a matice $W_{(4)}$ je dána

$$W_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Výsledkem je matice 8×8 s aproximovanými původními hodnotami obrazu [14].

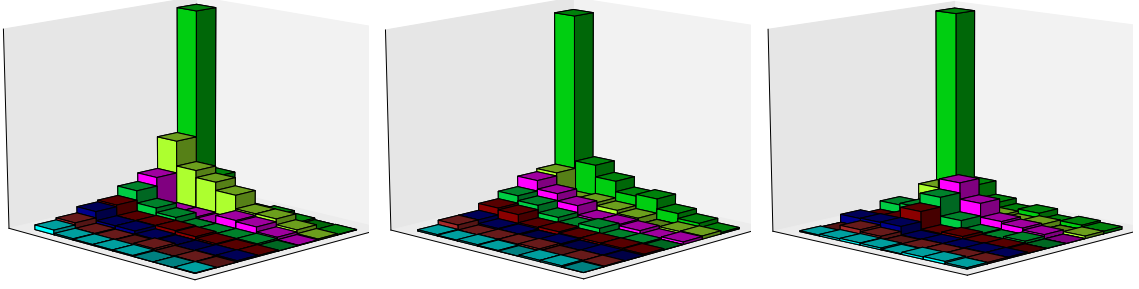


Obrázek 2.7: Aproximace LODCT 1D schéma.

2.2.4 Diskrétní sinová transformace

Diskrétní sinová transformace (DST) [30] vyjadřuje vstupní signál jako sumu sinusovek s rozdílnými frekvencemi. Diskrétní sinová transformace (DST) je blízce příbuzná diskrétní kosinové transformaci a stejně jako ona může být použita na vícerozměrný signál. Avšak pro diskrétní sinovou transformaci již nelze použít obdobnou rovnici jako je použita u DCT, jelikož při výpočtu DC koeficientu by vycházelo $\sin(0)$ což je rovno nule. Tudíž je zapotřebí nalézt jinou variantu DST.

DST má stejně jako diskrétní kosinová transformace 8 standardních variant [25]. Jelikož většina variant koncentruje energii okolo středu, bylo nutné nalézt takovou variantu, která směřuje energii do několika prvních hodnot a aby DC koeficient nebyl nulový. Na základě implementace a analýzy výsledných koeficientů všech osmi variant DST jsem došel k závěru, že varianta, která je v literatuře označována jako DST-VII, nejlépe koncentruje energii do levého horního rohu, a tudíž je použitelná pro kompresi obrazu. Tato transformace u obrázků s nižší kvalitou tvoří artefakty, které jsou zapříčiněny redukcí vyšších frekvencí při kvantování. Pro variantu DST-VII existuje inverzní varianta označovaná jako DST-VI, která je použitelná pro dekompresi obrazu. Tato transformace je aplikována na vstupní signál,



Obrázek 2.8: Koeficienty DST transformace na blocích 8×8 .

který je rozdělen do vzájemně disjunktních stejně velkých bloků. Rovnice pro variantu DST-VII je dána

$$X_i = \sqrt{\frac{2}{N + \frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin \left(\frac{(i + \frac{1}{2}) \pi (n + 1)}{N + \frac{1}{2}} \right), \quad (2.13)$$

kde x_n jsou vstupní data. Varianta DST-VII má na vstupu matici hodnot obrazu, ve většině případů je použita matice 8×8 . Po aplikaci 2D DST-VII získám matici transformovaných koeficientů. Inverzní varianta DST-VI má na vstupu matici koeficientů, pro které po aplikaci 2D DST-VI získám matici původních hodnot obrazu. Výpočet diskretní sinové i kosinové transformace je jednoduchý, ale zabírá příliš mnoho strojového času pro výpočet. Výpočet je možno značně zrychlit maticí předpočítaných hodnot sinus, resp. kosinus, pro různé hodnoty i a n . Tímto způsobem se spočítá pouze jednou pro všechny bloky a ne pro každý blok zvlášť.

Z vyobrazení básových funkcí ze vzorku obrazu 8×8 , Obrázek 2.2, lze zjistit, že v levém horním rohu již není složka úplně konstantní jako v případě DCT. Složky s největší frekvencí jsou soustředěny v pravém dolním rohu. Tudíž i v tomto případě je možno se zbavit vysokých frekvencí, které jsou uloženy na konci, aniž by došlo k velké ztrátě informace jako v případě diskretní kosinové transformace.

Z vyobrazení grafů v Obrázku 2.8 lze vidět, že diskretní sinová transformace také koncentruje energii do levého horního rohu, avšak v porovnání s DCT nikoliv až tak dobře.

2.2.5 Diskretní Hartleyho transformace

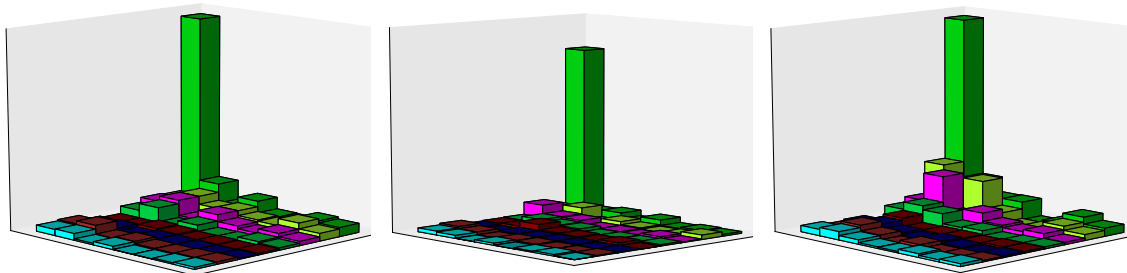
Další transformace, která spadá do skupiny diskretních trigonometrických transformací, je diskretní Hartleyho transformace [31]. Tato transformace je blízce příbuzná s diskretní Fourierovou transformací, jelikož pro výpočet koeficientů využívá kosinové i sinové funkce. Avšak oproti DFT rovnice pro výpočet koeficientů diskretní Hartleyho transformace neobsahuje komplexní čísla, ale pouze reálná čísla. Další výhodou této transformace je, že báze dopředné DHT je stejná jako inverzní.

Rovnice pro výpočet dopředné DHT je dána

$$X_i = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \text{cas} \left(\frac{2i\pi n}{N} \right), \quad (2.14)$$



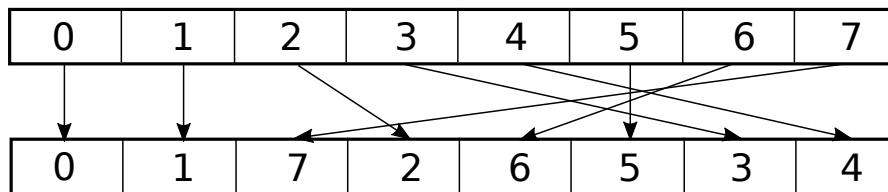
Obrázek 2.9: Referenční obrázek.



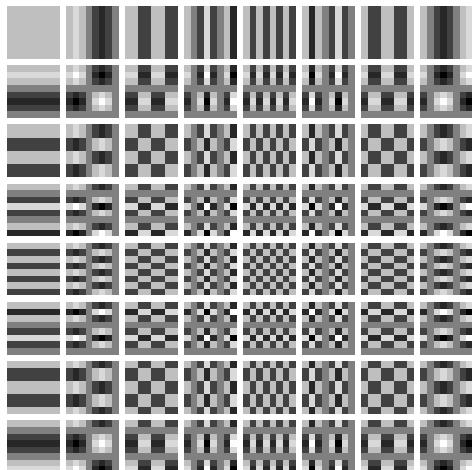
Obrázek 2.10: Koeficienty DHT transformace na blocích 8×8 .

kde funkce $\text{cas}\theta = \cos\theta + \sin\theta$. Rovnice pro výpočet inverzní DHT je až na škálovací konstantu totožná s rovnicí pro výpočet dopředné DHT. Při výpočtu koeficientu X_4 pro $N=8$ zjistíme, že je na tomto místě uložen koeficient s nejvyšší frekvencí a nikoliv v koeficientu X_7 , jelikož při dosazení do rovnice (2.14) $i = 4$ dojde k tomu, že bude výsledek funkce sinus pro všechny hodnoty n roven 0. Tímto nám zůstává pouze funkce kosinus, u které po dosazení $n = 0, 1, \dots, 7$ získáme hodnoty $+1, -1, +1, -1, \dots$. Na Obrázku 2.12 jsou bazové obrázky DHT, na kterých lze vidět, že vyšší frekvence jsou uloženy poblíž koeficientu se souřadnicemi $[4, 4]$.

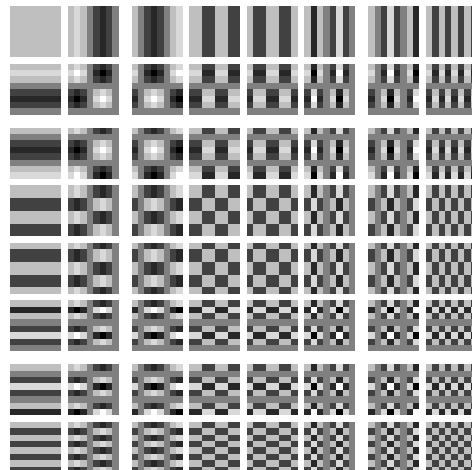
Pro lepší výsledky DHT transformace je důležité mít podobně jako DCT, uloženy koeficienty s nejvyššími frekvencemi v pravém dolním rohu. Tohoto lze docílit přeuspořádáním koeficientů dle Tabulky 2.11. Obrázky bazových funkcí po této úpravě lze vidět na Obrázku 2.13. Výsledné koeficienty spočtené na daném referenčním vzorku lze vidět na Obrázku 2.10.



Obrázek 2.11: Přeuspořádání koeficientů DHT.



Obrázek 2.12: Báze DHT.



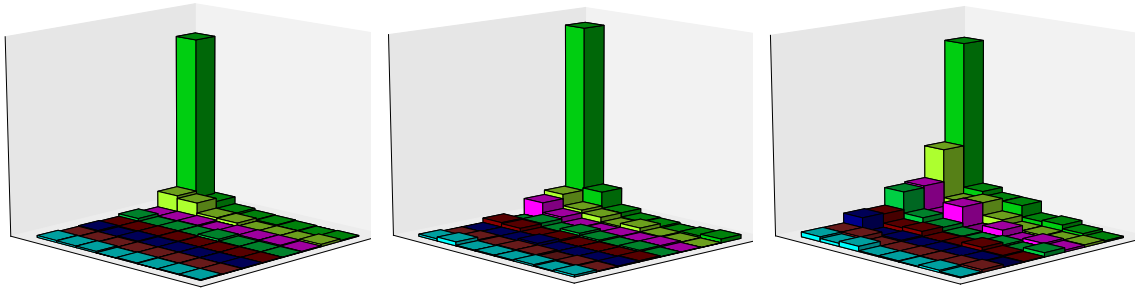
Obrázek 2.13: Báze DHT (modifikovaná).

2.3 Diskrétní vlnková transformace

Diskrétní vlnková transformace [23] je transformace s bází tvořenou funkcemi tzv. vlnkami. Vlnková transformace rozkládá vstupní signál do vlnek, škálovaných a posunutých variant mateřské vlnky. Vlnková báze, stejně jako Fourierova báze, vyobrazuje signál pomocí amplitudy koeficientů. Vlnky jsou dobře lokalizované a je zapotřebí pouze málo koeficientů, které představují lokální přechodné struktury. V obraze jsou největší vlnkové koeficienty umístěny v oblasti hran nebo nepravidelných textur. Na rozdíl od předešlých transformací, kde jejich vlastnosti vyžadovaly, aby byl obrázek zpracován po blocích 8×8 , tak algoritmus založený na vlnkových transformacích pracuje s celým obrázkem a převádí jej na popisy formou vlnových funkcí. Důvodem zpracování obrazu jako celku je, aby se předešlo častým chybám koncových bodů, jelikož při výpočtu DWT koeficientů jsou potřeba i okolní hodnoty. Tento průchod má výhodu, že nevytváří blokové artefakty, jako tomu je u DCT. Vlnková transformace je využita i ve standardu JPEG 2000, který byl vytvořen jako náhrada za standard JPEG. Standard JPEG 2000 využívá konkrétně Cohen-Daubechies-Feauveau (CDF) 5/3 pro bezztrátovou kompresi obrazu a CDF 9/7 pro ztrátovou kompresi obrazu. Obě z těchto transformací je možno nahradit namísto diskrétní kosinové transformace.

2.3.1 CDF 5/3 a CDF 9/7

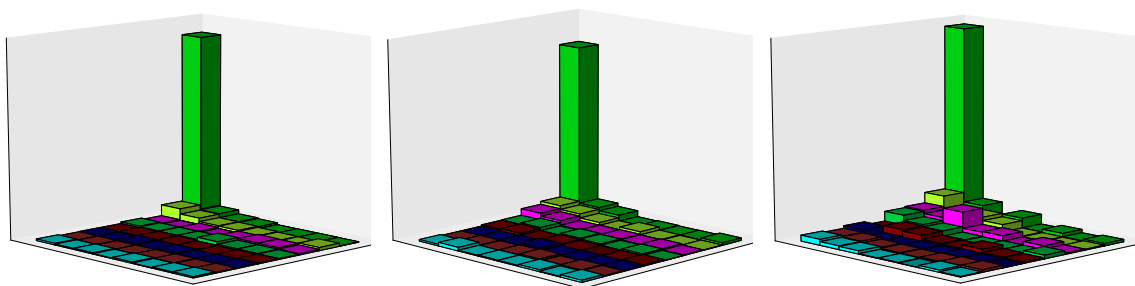
Tradiční metoda pro výpočet koeficientů DWT je metoda založená na konvoluci, která je složena ze dvou filtrů, dolnoproustný a hornoproustný filtr [7]. Vstupní signál je rozložen na nízké frekvence a vysoké frekvence. Tato metoda je však neefektivní, jelikož polovina z vypočtených koeficientů je redundantní.



Obrázek 2.14: Koeficienty CDF 5/3 transformace na blocích 8×8 .

Pro výpočet koeficientů lze také použít lifting schéma [19]. Lifting schéma se používá pro rychlejší a jednodušší výpočet DWT koeficientů oproti komplexnosti konvolučně založených DWT filtrů. Schéma lifting snižuje výpočetní nároky faktorizací polyfázových matic (polyfázová matice je matice, která obsahuje filtrační banky) [38] DWT do jednoduchých matic.

Lifting schéma DWT [23], které je vyobrazeno na Obrázku 2.19, je aplikováno nejdříve po řádcích matice obrazu a poté se aplikuje na sloupce matice. Výsledkem je matice koeficientů, která je rozdělena na čtyři části. V levém horním rohu jsou umístěny nízké frekvence horizontální i vertikální, v pravém horním rohu jsou umístěny vysoké frekvence horizontální a nízké frekvence vertikální, v levém dolním rohu jsou obsaženy nízké frekvence horizontální a vysoké frekvence vertikální a v pravém dolním rohu jsou obsaženy vysoké frekvence horizontální i vertikální. Převod může být i více průchodový, počet průchodů určuje kompresní poměr a kvalitu dekomprimovaného obrázku. Čím méně průchodů se provede, tím vyšší je kompresní poměr, ale i nižší kvalita. Po prvním průchodu schématu lifting se provádí další průchod již pouze v části s nízkými frekvencemi.



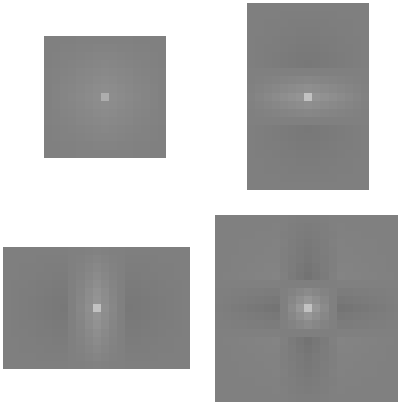
Obrázek 2.15: Koeficienty CDF 9/7 transformace na blocích 8×8 .

Lifting schéma [19] je složeno z operace Split, dále ze dvou opakujících se operací Predict a Update a z operace Scale. Operace Split rozdělí vstupní data na dvě části podle indexu na sudé a liché. Operace Predict generuje vlnkové koeficienty jako chyby v predikci hodnoty na lichém indexu z okolních hodnot na sudých indexech, rovnice pro operaci Predict je dána

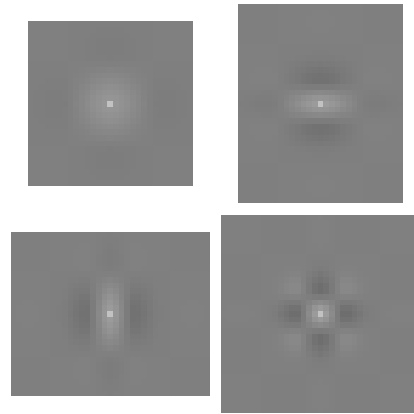
$$X_D[n] = x_{odd}[n] + \alpha (x_{even}[n-1] + x_{even}[n+1]). \quad (2.15)$$

Výsledné koeficienty z operace Predict reprezentují detaily vstupního signálu neboli vysoké frekvence. Operace Update, kde jsou výsledné koeficienty generovány z hodnot na sudém indexu a z okolních predikovaných hodnot na lichých indexech a které reprezentují hrubou aproximaci originálního signálu. Rovnice pro výpočet operace Update je dána

$$X_A[n] = x_{even}[n] + \beta (X_D[n-1] + X_D[n+1]). \quad (2.16)$$



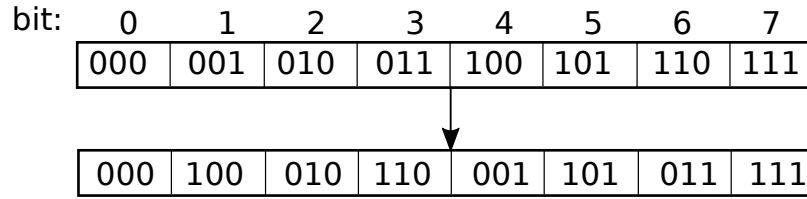
Obrázek 2.16: CDF 5/3 báze.



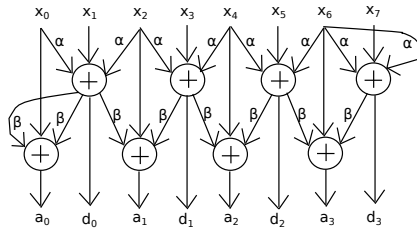
Obrázek 2.17: CDF 9/7 báze.

Při DWT se nejdříve aplikuje operace Predict a následně operace Update a při inverzní DWT je nejdříve aplikována operace Update a poté operace Predict. Operace Scale slouží ke konečnému škálování koeficientů, kde nízké frekvence jsou násobeny škálovací konstantou a vysoké frekvence jsou děleny škálovací konstantou. Jelikož jsou výsledná data uložena do bloku matice 8×8 , transformaci je dále zapotřebí provést dvakrát, pokaždé na části s nízkými frekvencemi, LL Obrázek 2.25. Pro uložení koeficientů do bloků 8×8 jsou polohy koeficientů zaměněny za pomoci bitové reverze indexů jak po řádcích, tak i po sloupcích, čímž se přesunou do levého horního rohu nízké frekvence a tudíž splňují formu, jak jsou uloženy koeficienty DCT Obrázek 2.18. Dalším problémem je výpočet koeficientů na okrajích obrazu. Existuje několik možných řešení tohoto problému, například zrcadlením protějšních bodů nebo použitím určité konstanty.

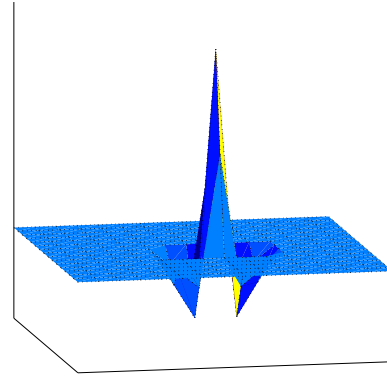
CDF 5/3 je tvořen dolnoproputným filtrem, který má 5 koeficientů a hornoproputným filtrem, který má 3 koeficienty [21]. Báze CDF 5/3 je znázorněna na Obrázku 2.16. Pro výpočet koeficientů z obrazu je použito lifting schéma. Lifting schéma pro CDF 5/3 je složeno z jedné aplikace operací Predict a Update v rámci jednoho průchodu dle Obrázku 2.19. Pro filtr 5/3 je konstanta $\alpha = -0,5$, konstanta $\beta = 0,25$ a konstanta pro škálování je rovna 1,23. Škálovací konstanta byla změněna oproti stávající konstantě $\sqrt{2}$ na základě testování na jednotlivých obrázcích, kde nejoptimálnější škálovací konstanta odpovídala hodnotě 1,23. Z grafu na Obrázku 2.14 je vyobrazeno, jak dobře koncentruje transformace energii do levého horního rohu. Vlnka CDF 5/3 je použita ve standardu JPEG 2000 pro bezztrátovou kompresi obrazu, při které nedochází ke kvantování koeficientů.



Obrázek 2.18: Bitová reverze indexů.

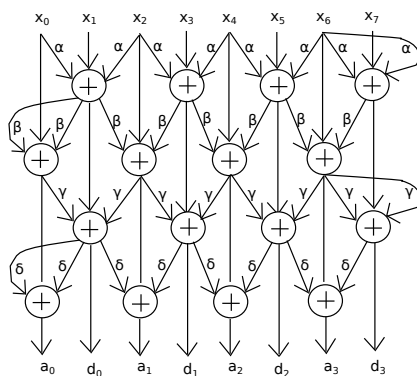


Obrázek 2.19: Lifting schéma pro CDF 5/3.

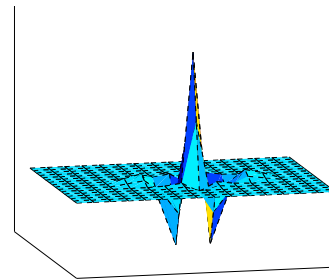


Obrázek 2.20: Koefficienty CDF 5/3.

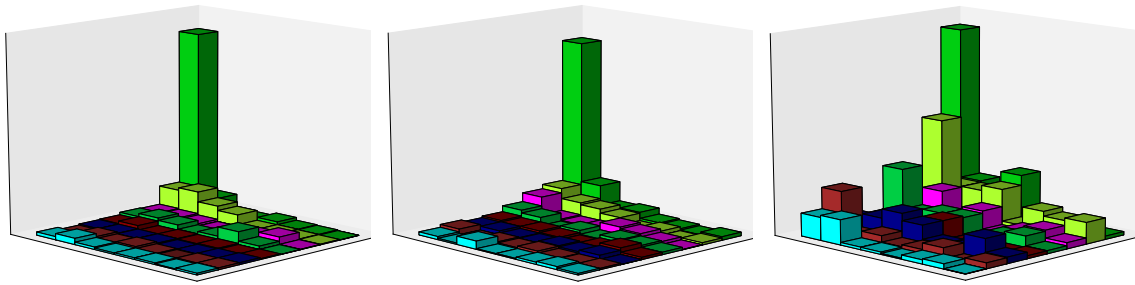
CDF 9/7 je tvořen dolnoproustným filtrem, který má 9 koeficientů a hornoproustným filtrem, který má 7 koeficientů [19]. Báze CDF 9/7 je znázorněna na Obrázku 2.17. Lifting schéma pro CDF 9/7 je složeno ze dvou po sobě opakujících se operací Predict a Update v rámci jednoho průchodu dle Obrázku 2.21. Pro výpočet koeficientů jsou použity konstanty $\alpha = -1,5861343$, $\beta = -0,052980119$, $\gamma = 0,88291108$ a $\delta = 0,44350685$. Koeficienty jsou škálovány konstantou 1,1496044, která je použita i ve standardu JPEG 2000. Z vyobrazení grafů v Obrázku 2.15 lze vidět, že CDF 9/7 také koncentruje energii do levého horního rohu. Vlnka CDF 9/7 je použita ve standardu JPEG 2000 pro ztrátovou kompresi obrazu.



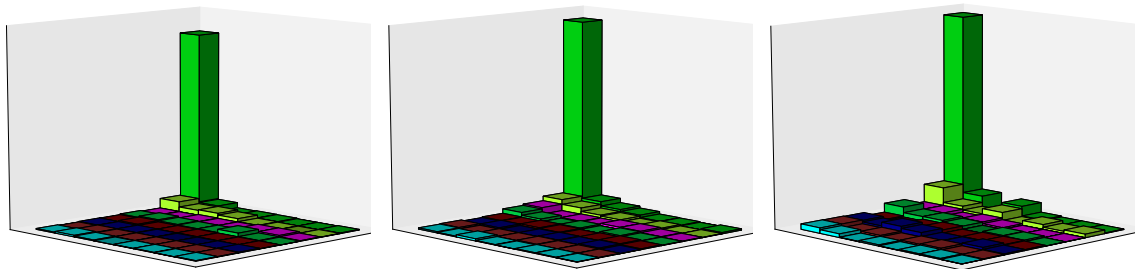
Obrázek 2.21: Lifting schéma pro CDF 9/7.



Obrázek 2.22: Koefficienty CDF 9/7.



Obrázek 2.23: Koeficienty modifikované CDF 5/3 transformace na blocích 8×8 .



Obrázek 2.24: Koeficienty modifikované CDF 9/7 transformace na blocích 8×8 .

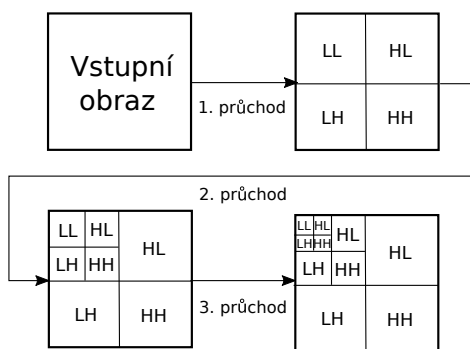
2.3.2 Modifikace CDF 5/3 a 9/7 wavelet

Modifikace vlnkové transformace CDF 5/3 a 9/7 spočívá v rozšíření separabilní vlnkové transformace o provedení výpočtu DWT koeficientů i na detailech při dalších průchodech dle Obrázku 2.26. Pro výpočet lze použít stejné schéma lifting jako u separabilní CDF 5/3 a CDF 9/7. Koeficienty této modifikace na blocích 8×8 jsou vyobrazeny na Obrázku 2.23 pro CDF 5/3 a Obrázek 2.24 pro CDF 9/7.

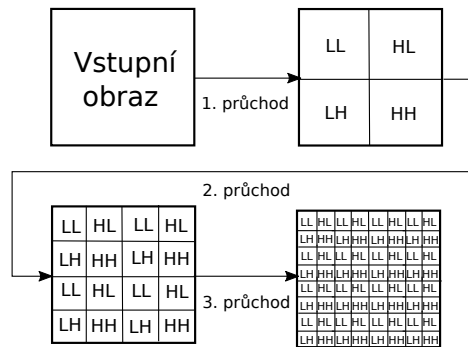
Stejně jako u separabilní DWT jsou polohy koeficientů zaměněny za pomoci bitové reverze indexů jak po řádcích, tak i po sloupcích, čímž se přesunou do levého horního rohu nízké frekvence, aby splnily formu, jak jsou uloženy koeficienty DCT.

2.3.3 CDF 5/3 a CDF 9/7 red black vlnková transformace

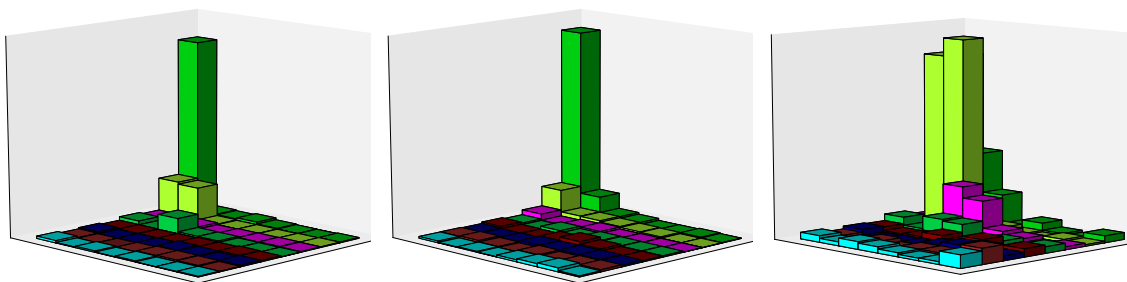
Separabilní 2D DWT dokáží detekovat horizontální, vertikální a diagonální prvky v původních datech. Ostatní prvky nejsou až tak jednoduše detekovatelné. Tento problém řeší neseperabilní 2D DWT [36]. 2D DWT, jehož koeficienty lze vypočítat za pomoci schématu lifting, které se mírně liší od schéma lifting použitého u separabilní DWT. U neseper-



Obrázek 2.25: Výsledná matice koeficientů separabilní DWT (první znak značí nízké (L) nebo vysoké (H) frekvence horizontální, druhý znak značí vertikální).



Obrázek 2.26: Výsledná matice koeficientů modifikace separabilní DWT (první znak značí nízké (L) nebo vysoké (H) frekvence horizontální, druhý znak značí vertikální).



Obrázek 2.27: Koeficienty CDF 5/3 red-black transformace na blocích 8×8 .

bilní 2D DWT jsou data rozdělena na dvě podmnožiny za pomoci quincunx mřížky (této transformaci se také říká red-black transformace) [15]. Toto dělení je aplikováno dvakrát v rámci jednoho průchodu. Při druhém dělení je quincunx mřížka otočená o 45 stupňů. Jeden průchod lifting schéma je složen ze dvou částí, horizontálně/vertikální lifting a diagonální lifting. Pro horizontálně/vertikální lifting je podobně jako pro 1D transformaci signál nejdříve rozdělen operací Split na dvě části na červená a černá políčka, dle Obrázku 2.29, dále jsou provedeny operace Predict a Update.

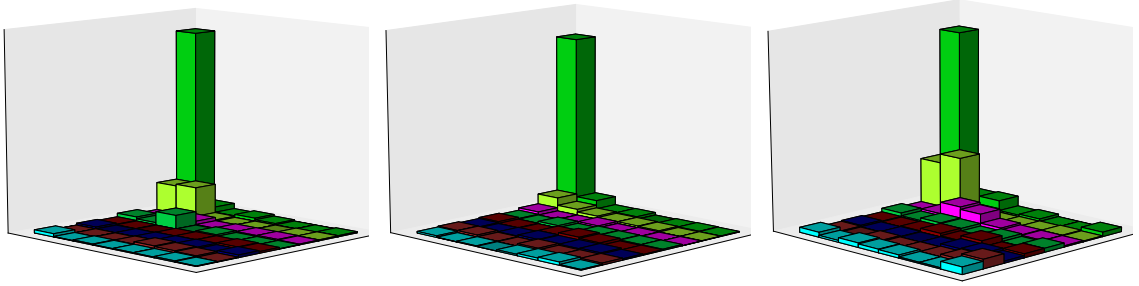
Pro operaci Predict jsou hodnoty na černých políčkách predikovány za pomoci sousedních červených polí

$$X_{i,j} = x_{i,j} + \alpha (x_{i-1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j}). \quad (2.17)$$

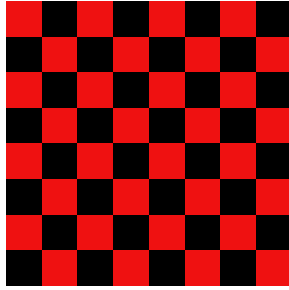
Operace Update, kde jsou hodnoty na červených políčkách aktualizovány za pomoci sousedních černých polí

$$X_{i,j} = x_{i,j} + \beta (x_{i-1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j}). \quad (2.18)$$

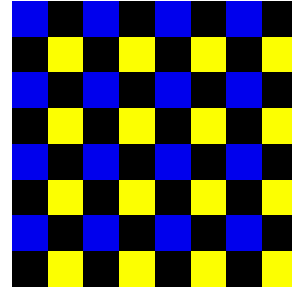
Následně je proveden diagonální lifting, kde je pole rozděleno znovu na dvě části na modrá a žlutá políčka podle Obrázku 2.30. Následovně jsou nad polem provedeny operace Predict,



Obrázek 2.28: Koeficienty CDF 9/7 red-black transformace na blocích 8×8 .



Obrázek 2.29: Horizontálně vertikální lifting.



Obrázek 2.30: Diagonální lifting.

kde jsou žlutá políčka predikována za pomoci sousedních modrých polí

$$X_{i,j} = x_{i,j} + \alpha (x_{i-1,j-1} + x_{i-1,j+1} + x_{i+1,j-1} + x_{i+1,j+1}) \quad (2.19)$$

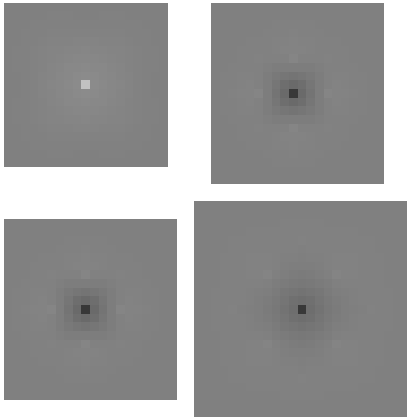
a operace Update, kde jsou modrá políčka aktualizována za pomoci žlutých polí

$$X_{i,j} = x_{i,j} + \beta (x_{i-1,j-1} + x_{i-1,j+1} + x_{i+1,j-1} + x_{i+1,j+1}). \quad (2.20)$$

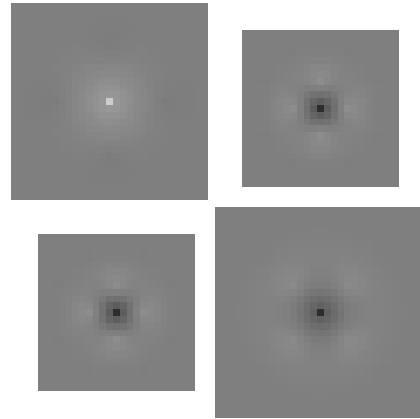
Další průchody lifting schéma jsou provedeny pouze na modrých políčkách. Oproti 1D transformaci jsou změněny také konstanty pro výpočet koeficientů, konstanta $\alpha = -0,25$, konstanta $\beta = 0,125$ a konstanta pro škálování je $\sqrt{2}$.

Red black wavelet transformace pro CDF 9/7 využívá stejný horizontálně/vertikální lifting a diagonální lifting jako red black pro CDF 5/3, avšak lifting schéma pro red black CDF 9/7 je složeno ze dvou po sobě opakujících se operací Predict a Update v rámci jednoho průchodu. Na Obrázku 2.32 je zobrazena báze CDF 9/7 red black wavelet.

Jelikož jsou výsledná data uložena do bloku matice 8×8 , transformaci je dále zapotřebí provést dvakrát, pokaždé na části s nízkými frekvencemi LL, Obrázek 2.25. Pro uložení koeficientů do bloků 8×8 jsou polohy koeficientů zaměněny, stejně jako u separabilní DWT, za pomoci bitové reverze indexů jak po řádcích, tak i po sloupcích dle Obrázku 2.18. Na Obrázku 2.27 a na Obrázku 2.28 jsou ukázky koeficientů red-black transformace CDF 5/3 a CDF 9/7 na vzorcích obrazu.



Obrázek 2.31: CDF 5/3 red-black báze.

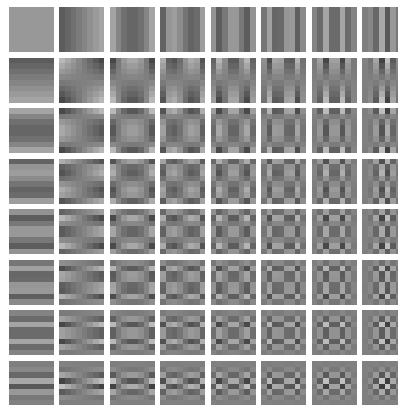


Obrázek 2.32: CDF 9/7 red-black báze.

2.4 Polynomiální transformace

Třída transformací, nazývaná polynomiální transformace [9], byla hodně využívána pro realizaci efektivních vícerozměrných algoritmů v digitálním zpracování signálu. Některé z příkladů významné výpočetní úspory získané pomocí polynomiálních transformací zahrnují vícerozměrnou diskretní Fourierovu transformaci, konvoluce a také DCT. Aplikace polynomiálních transformací na DCT není až tak přímočará jako v případě diskretní Fourierovy transformace a konvolucí.

2.4.1 Diskretní Chebysheva transformace



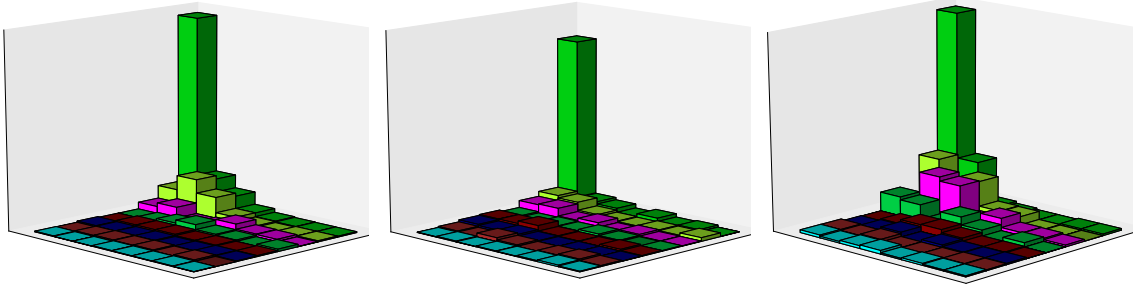
Obrázek 2.33: DChT báze.

Diskretní Chebysheva transformace [13] je relativně nová transformace, která využívá Chebyshevovy momenty k vyjádření báze matice. Stejně jako diskretní kosinová transformace, tak i diskretní Chebysheva transformace je odvozena z ortonormálních Chebyshevových polynomů. Chebyshevových polynomů existuje několik druhů, kde je z nich nejdůležitější polynom prvního druhu $T_n(x)$, který v literatuře bývá označován jako Chebyshevův polynom. Chebyshevovy polynomy mají jednotkovou váhu a algebraické rekurentní vztahy zahrnující reálné koeficienty, což je činní vhodné pro definování transformace obrazu pro kompresi a dekompresi. Báze vektory diskretní kosinové transformace jsou úzce spjatý

s diskrétními Chebyshevovými polynomy, což motivuje k použití jiných typů Chebyshevových polynomů jako náhradu diskrétní kosinové transformace [18]. Vzorec pro Chebyshevův p -tý řád Chebyshevových momentů je vyjádřen v Tabulce 2.34.

$t_0(x)$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$
$t_1(x)$	$\frac{x}{\sqrt{42}} - \frac{7}{2\sqrt{42}}$
$t_2(x)$	$\frac{x^2}{2\sqrt{42}} - \frac{x\sqrt{7}}{2\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}$
$t_3(x)$	$\frac{x^3}{3\sqrt{66}} - \frac{7x^2}{2\sqrt{66}} + \frac{5x\sqrt{11}}{6\sqrt{6}} - \frac{7}{2\sqrt{66}}$
$t_4(x)$	$\frac{x^4\sqrt{7}}{24\sqrt{22}} - \frac{7x^3\sqrt{7}}{12\sqrt{22}} + \frac{425x^2}{24\sqrt{154}} - \frac{41x\sqrt{7}}{12\sqrt{22}} + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{22}}$
$t_5(x)$	$\frac{x^5\sqrt{7}}{20\sqrt{78}} - \frac{7x^4\sqrt{7}}{8\sqrt{78}} + \frac{8x^3\sqrt{14}}{3\sqrt{39}} - \frac{35x^2\sqrt{21}}{8\sqrt{26}} + \frac{4519x}{60\sqrt{546}} - \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{78}}$
$t_6(x)$	$\frac{x^6\sqrt{11}}{120\sqrt{6}} - \frac{7x^5\sqrt{11}}{40\sqrt{6}} + \frac{91x^4}{6\sqrt{66}} - \frac{147x^3\sqrt{3}}{8\sqrt{22}} + \frac{10829x^2}{120\sqrt{66}} - \frac{343x\sqrt{3}}{20\sqrt{22}} + \frac{1}{2\sqrt{66}}$
$t_7(x)$	$\frac{x^7\sqrt{143}}{420\sqrt{6}} - \frac{503x^6\sqrt{13}}{840\sqrt{66}} + \frac{9457x^5}{120\sqrt{858}} - \frac{427x^4\sqrt{11}}{12\sqrt{78}} + \frac{118537x^3}{120\sqrt{858}} - \frac{144809x^2}{120\sqrt{858}} + \frac{6893x\sqrt{11}}{140\sqrt{78}} - \frac{1}{2\sqrt{858}}$

Obrázek 2.34: Rovnice pro výpočet p -tého řádu Chebyshevových polynomů pro řád $p = 0 \dots 7$ a pro $N = 8$.



Obrázek 2.35: Koeficienty DChT transformace na blocích 8×8 .

Diskrétní Chebysheva transformace je aplikována na vstupní signál, který je rozdělen do vzájemně disjunktních bloků 8×8 . Rovnice pro výpočet dopředné diskrétní Chebyshevovy transformace je vyjádřena

$$T_p = \sum_{x=0}^7 t_p(x) f(x), \quad (2.21)$$

kde t_p je p -tý řád Chebyshevových polynomů. Bázové funkce Chebyshevových polynomů jsou zobrazeny na Obrázku 2.33.

2.4.2 Diskrétní Zolotarevova transformace

Zolotarevova transformace [35] je časově frekvenční transformace, která vychází z Fourierovy transformace. Bázi Zolotarevovy transformace tvoří funkce zexp , která je složena z prvního

a druhého druhu Zolotarevových polynomů. Funkce $zexp$ je vyjádřena za pomoci kosinové a sinové funkce

$$zexp(i2\pi lt) = z\cos(2\pi lt) + iz\sin(2\pi lt) \quad (2.22)$$

$$zexp(i2\pi lt) = \sum_{\mu=-l}^l a_{2\mu} \cos(2\pi \mu t) + i \sum_{\mu=-l}^l b_{2\mu} \sin(2\pi \mu t), \quad (2.23)$$

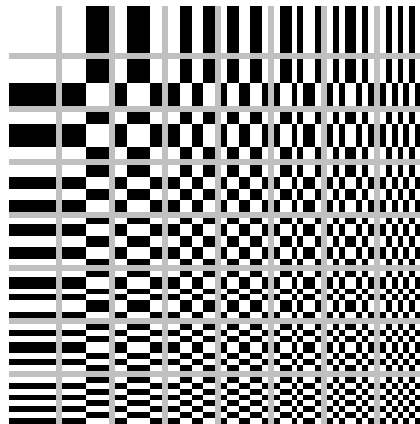
kde $a_{2\mu}$ a $b_{2\mu}$ jsou koeficienty Zolotarevových polynomů. Správná volba parametrů má velký dopad na časové a frekvenční rozlišení použité transformace. Celkem jsou zohledněny tři parametry: tvar okna, velikost okna a překrývání segmentu.

Diskrétní Zolotarevova kosinová transformace

Diskrétní Zolotarevova kosinová transformace (DZCT) [20] je časově frekvenční transformace, která je příbuzná s diskrétní kosinovou transformací. Diskrétní kosinová transformace je limitovaná kosinovými funkcemi, které nedosahují adekvátních výsledků při detekci nestacionárních signálů. Diskrétní Zolotarevova kosinová transformace je určena, aby tuto nevýhodu u DCT překonala. DZCT rozšiřuje operace DCT substitucí selektivními kosinovými báзовými funkcemi za kosinové funkce. DZCT využívá oproti DZT pouze dvě funkce, sudý a lichý selektivní kosinus $z\cos$.

2.5 Walshova-Hadamardova transformace

Diskrétní Walshova-Hadamardova transformace [30] je nesinusová transformace, jejíž báзовé funkce mají obdélníkový průběh a nabývají hodnot pouze $+1$ a -1 . Tato transformace je aplikována na vstupní signál, který je rozdělen do vzájemně disjunktních stejně velkých bloků. Walshova-Hadamardova transformace využívá pro výpočet koeficientů čtvercovou matici, jejíž velikost je úměrná velikosti bloku vzorkovaného signálu. Příklad použité Walshovy transformační matice pro blok 8×8 je znázorněn na Obrázku 2.25. Největší výhodou této transformace je rychlost a jednoduchost jejího výpočtu. Pro výpočet WHT koeficientů je potřeba pouze sčítání a odčítání hodnot. K rychlosti výpočtu přispívá i možnost provést veškeré výpočty pouze v celých číslech.



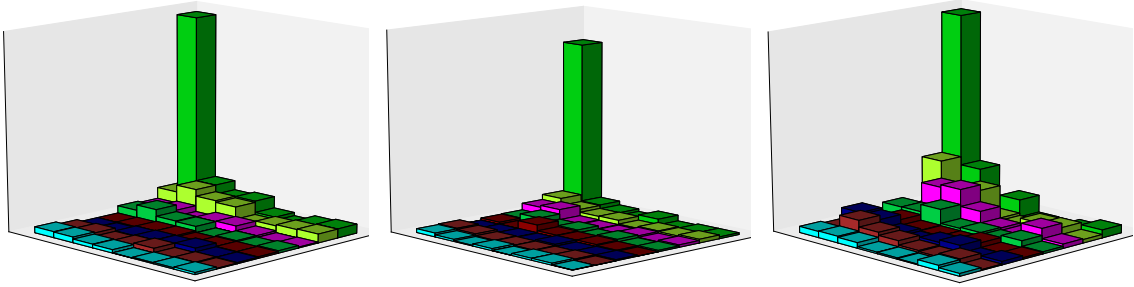
Obrázek 2.36: WHT báze.

Rovnice pro výpočet Walshovy transformace je uvedena

$$X_i = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W(i, n), \quad (2.24)$$

kde $W(i, n)$ udává souřadnice Walshovy transformační matice

$$W = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$



Obrázek 2.37: Koeficienty WHT transformace na blocích 8×8 .

WHT transformace má na vstupu matici hodnot obrazu, stejně jako v předešlých případech je použita matice 8×8 . Její aplikací se získá matice transformovaných koeficientů. Walsh-Hadamardova transformace využívá k výpočtu koeficientů Walshovu transformační matici (2.25), stejná transformační matice je použita i pro výpočet inverzní WHT [30].

Z vyobrazení bazových funkcí WHT na vzorku 8×8 , Obrázek 2.36, lze vidět, že je stejnosměrná složka uložena v levém horním rohu matice. Od stejnosměrné složky dochází k postupnému zvyšování frekvence.

Na základě vyobrazených grafů koeficientů WHT transformace, Obrázek 2.37, je vidět, že podobně jako DCT koncentruje energii do levého horního rohu matice.

2.6 Mapped real transformace

MRT (Mapped real transform nebo také M-dimensional real transform) [27] je transformace, která analyzuje 2D signál ve frekvenční oblasti bez komplexních operací, ale pouze sčítání čísel v pohyblivé řádové čáře. Transformace mapuje $N \times N$ matici se vstupními daty do M

matic o velikosti $N \times N$, kde $M = \frac{N}{2}$, což je vysoce redundantní. Výpočet MRT koeficientů transformace lze za pomoci rovnice

$$Y_{k_1, k_2}^p = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} A_{k_1, k_2, p, n_1, n_2} x_{n_1, n_2}, \quad (2.26)$$

kde hodnotu A lze vypočítat za pomoci

$$A_{k_1, k_2, p, n_1, n_2} = \begin{cases} 1 & : ((n_1 k_1 + n_2 k_2))_N = p \\ -1 & : ((n_1 k_1 + n_2 k_2))_N = p + M, \\ 0 & : \text{jinak} \end{cases} \quad (2.27)$$

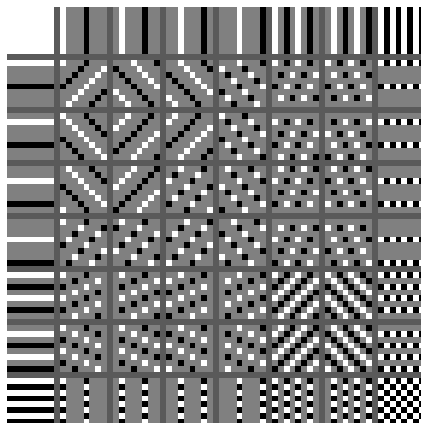
kde Y jsou MRT koeficienty, x_{n_1, n_2} jsou vstupní data z matice $N \times N$, kde $0 \leq n_1, n_2 \leq N-1$, $0 \leq p \leq M-1$, $z = ((n_1 k_1 + n_2 k_2))_N$ a $M = \frac{N}{2}$. Pro vstupní matici 8×8 vychází 4 MRT matice ($M = \frac{8}{2}$). Pro 2D signál o velikosti $N \times N$ je celkový počet MRT koeficientů $\frac{N^3}{2}$, avšak pouze N^2 koeficientů je unikátních. Tudíž pro blok 8×8 je celkový počet 256 MRT koeficientů a pouze 64 z nich je unikátních. Většinu z MRT koeficientů na určitých souřadnicích není nutno počítat, jelikož mají buď vždy nulovou hodnotu nebo některé koeficienty sdílejí stejnou velikost, i když mají některé rozdílné znaménko. Z těchto důvodů je MRT mapování vysoce redundantní. Tato transformace není vhodná pro kompresi obrazu, jelikož generuje více hodnot na výstupu oproti počtu vstupních hodnot. Aby bylo možno tuto transformaci použít, je nutno odstranit redundantní hodnoty. Jednou z možností odstranění redundantních koeficientů je metoda UMRT.

[0, 0] ₀	[0, 1] ₀	[0, 1] ₁	[0, 1] ₂	[0, 1] ₃	[0, 2] ₀	[0, 2] ₂	[0, 4] ₀
[1, 0] ₀	[1, 1] ₀	[7, 1] ₁	[7, 1] ₂	[7, 1] ₃	[3, 1] ₀	[5, 1] ₀	[1, 4] ₀
[1, 0] ₁	[1, 1] ₁	[7, 1] ₀	[3, 1] ₁	[5, 1] ₁	[1, 2] ₁	[3, 2] ₁	[1, 4] ₁
[1, 0] ₂	[1, 1] ₂	[5, 1] ₂	[2, 1] ₀	[6, 1] ₀	[1, 2] ₂	[3, 2] ₂	[1, 4] ₂
[1, 0] ₃	[1, 1] ₃	[5, 1] ₃	[1, 2] ₀	[3, 2] ₀	[1, 2] ₃	[3, 2] ₃	[1, 4] ₃
[2, 0] ₀	[3, 1] ₂	[2, 1] ₁	[2, 1] ₂	[2, 1] ₃	[2, 2] ₀	[6, 2] ₀	[2, 4] ₀
[2, 0] ₂	[3, 1] ₃	[6, 1] ₁	[6, 1] ₂	[6, 1] ₃	[2, 2] ₂	[6, 2] ₂	[2, 4] ₂
[4, 0] ₀	[4, 1] ₀	[4, 1] ₁	[4, 1] ₂	[4, 1] ₃	[4, 2] ₀	[4, 2] ₂	[4, 4] ₀

Obrázek 2.38: Tabulka převodu MRT koeficientů na modifikovanou SMRT.

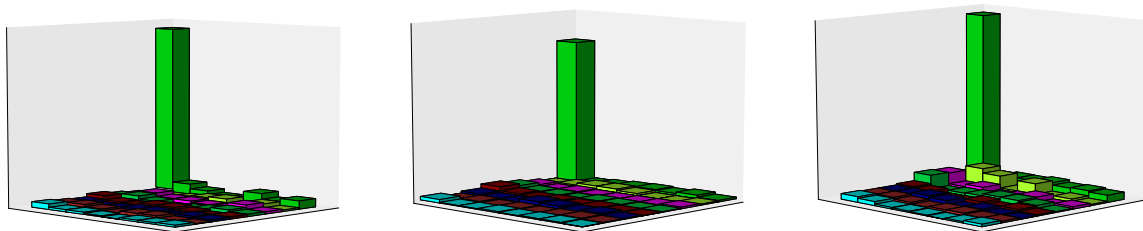
Unique mapped real transformace Metoda Unique mapped real transform (UMRT) dokáže eliminovat redundantní koeficienty přítomné v MRT reprezentaci [27]. Tato metoda narozdíl od MRT mapuje vstupní data v bloku o velikosti $N \times N$ do pouze jedné MRT matice o velikosti $N \times N$. Výpočet UMRT koeficientů je možný buď výpočtem všech MRT koeficientů a následnou identifikací unikátních dat ze všech čtyřech matic a nebo přímým výpočtem UMRT koeficientů. Obě dvě možnosti jsou podrobně vysvětleny v [29].

Sequency based mapped real transformace Sequency based mapped real transformace (SMRT) stejně jako UMRT mapuje data v bloku $N \times N$ do pouze jedné matice $N \times N$. Matici N^2 UMRT koeficientů lze uložit v seřazené sekvenci napříč horizontálním, vertikálním a diagonálním směrem pro odvození sekvenčně založené reprezentaci [37]. Tato reprezentace seřazených koeficientů se nazývá sequency based mapped real transformace [24].



Obrázek 2.39: Báze SMRT (modifikace).

Jelikož báze funkce SMRT nejsou úplně seřazeny od nejnižších frekvencí po nejvyšší frekvence z levého horního rohu, bylo nutné využít jiné seřazení koeficientů, kde jsou výsledné báze funkce vyobrazeny v Obrázku 2.39, kde bílé místa značí přičítání hodnoty, černá značí odečítání hodnoty a šedá značí nezahrnutí hodnoty. Souřadnice modifikovaných SMRT koeficientů pro $N=8$ jsou uvedeny v Tabulce 2.38, kde pro $[n_1, n_2]_p$ jsou n_1 a n_2 souřadnice v matici a p identifikuje MRT matici. Výpočet koeficientů modifikované verze SMRT lze provést za pomoci výpočtu všech čtyř MRT matic pro jeden blok 8×8 dle rovnice (2.26). Následně je nutné identifikovat unikátní hodnoty ze všech čtyř matic a uložit ve správném pořadí. Tyto hodnoty lze identifikovat v daném pořadí za pomoci Tabulky 2.38.



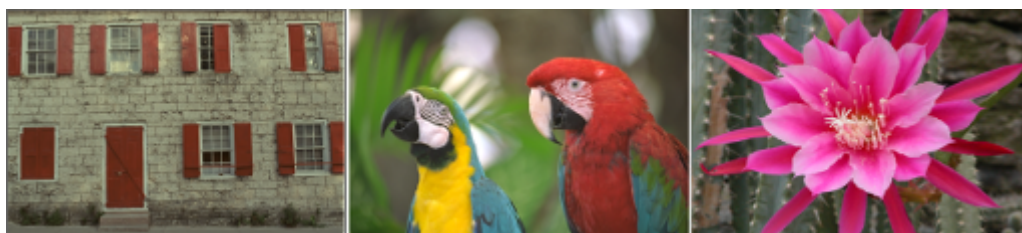
Obrázek 2.40: Koeficienty SMRT transformace na blocích 8×8 .

Kapitola 3

Výsledky transformací

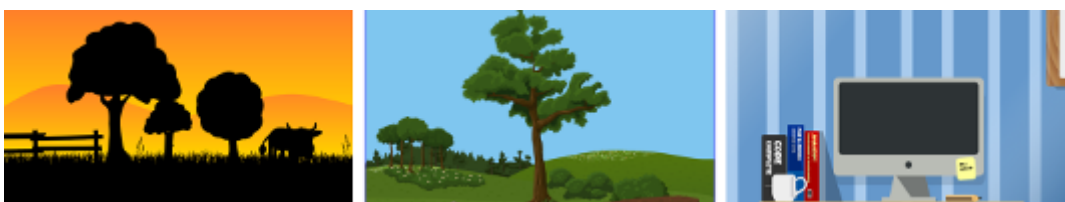
V této sekci jsou analyzovány transformace použité v kompresním řetězci JPEGu. Každá transformace byla uvedena a vysvětlena v předchozí sekci. Transformace jsou implementovány v knihovně libjpeg od Independent JPEG group. Každá transformace je testována za pomoci datasetu obrázků. Celkem jsou použity dva sady obrázků.

První set je složen z přibližně 300 obrázků. Tento set obsahuje především obrázky s různými scenériemi přírody z různých částí světa, dále obrázky zvířat, různé druhy květin, obrázky plodin, obrázky budov a měst a obrázky automobilů. Tyto obrázky byly převzaty z [26] a [16]. Na Obrázku 3.1 je zobrazeno několik vzorků z tohoto datasetu.



Obrázek 3.1: Ukázky obrázků z prvního setu.

Druhý set obsahuje celkem 200 obrázků. Tento set obsahuje výhradně uměle vytvořené obrázky postav, textur, log a další obrázky. Tyto obrázky byly převzaty z [28]. Některé z obrázků tohoto setu jsou vyobrazeny na Obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Ukázky obrázků z druhého setu.

Na každém obrázku z obou datasetů je provedena komprese obrazu a následně dekomprese obrazu pro všechny probrané transformace. Každá komprese je provedena při různém nastavení kvalit, nastavením parametru $\text{quality} = 1 \dots 100$, čímž dochází k nastavení úrovně kvantizačních koeficientů.

Následně je nad každým výsledným obrázkem vypočtena metrika PSNR, která vyjadřuje poměr mezi maximální energií signálu a energií šumu a metrika SSIM, která porovnává dva

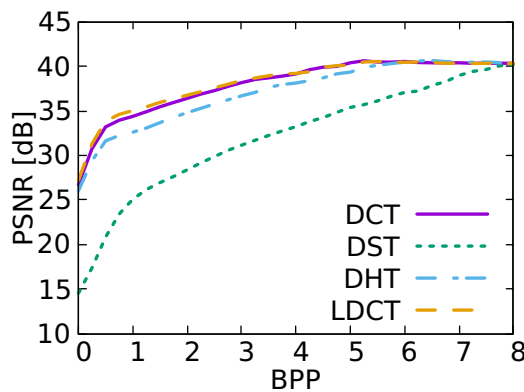
obrázky na základě lidského vnímání scény. Tyto výsledky jsou poté zprůměrovány zvlášť pro oba datasety a vyneseny do grafu.

Nejdříve jsou analyzovány diskrétní trigonometrické transformace, které byly probrány v Sekci 2.2, dále jsou testovány vlnkové transformace, separabilní, neseperabilní a modifikace CDF 5/3 a CDF 9/7, tyto transformace jsou probrány v Sekci 2.3. Další analyzované transformace jsou polynomiální transformace. Z těchto transformací je analyzována pouze diskrétní Chebysheva transformace. Poté je analyzována Walshova-Hadamardova transformace a mapped real transformace. Na závěr jsou porovnány a vyhodnoceny pouze nejlepší transformace z jednotlivých skupin transformací.

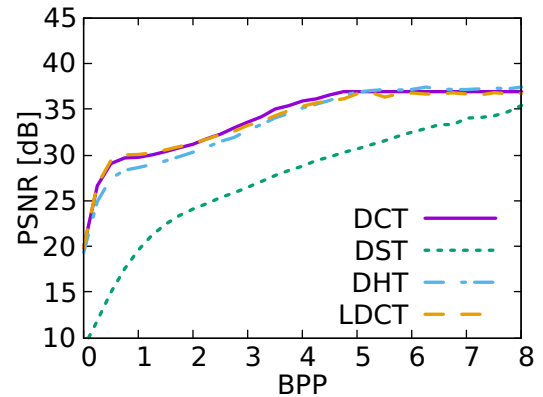
3.1 Diskrétní trigonometrické transformace

Diskrétní kosinová transformace je jádrem komprese obrazových dat ve standardu JPEG. Tato transformace se řadí mezi diskrétní trigonometrické transformace. Jelikož je mým cílem nalézt transformaci, která by byla vhodná jako náhrada za dosavadní diskrétní kosinovou transformaci. Zvolil jsem proto nejdříve prozkoumání další transformace, která patří také do skupiny diskrétních trigonometrických transformací. Jednou z těchto transformací je diskrétní sinová transformace, která je podobná diskrétní kosinové transformaci. Stejně jako diskrétní kosinová transformace, tak i diskrétní sinová transformace má 8 standardních variant. Jelikož diskrétní kosinová transformace, varianta II, koncentruje energii do levého horního rohu, bylo zapotřebí nalézt takovou variantu diskrétní sinové transformace, která by měla stejné vlastnosti. Další transformace z diskrétních trigonometrických transformací je diskrétní Hartleyho transformace, která je stejně jako DCT a DST příbuzná s diskrétní fourierovou transformací.

Další z možností je použití modifikované diskrétní kosinové transformace. Jednou z těchto modifikací je lokální DCT. Tato transformace umožňuje redukovat nespojitosti na hranách bloků 8×8 a tudíž by mělo dojít k odstranění blokových artefaktů. Z tohoto důvodu by mělo dojít ke zlepšení výsledků, zvláště při nižších kvalitách výstupního obrazu, kde se výrazněji vyskytují blokové artefakty u DCT.



Obrázek 3.3: Porovnání trigonometrických transformací s datasetem obsahujícím reálné obrázky (DCT, DST, DHT a LDCT) dle metriky PSNR.

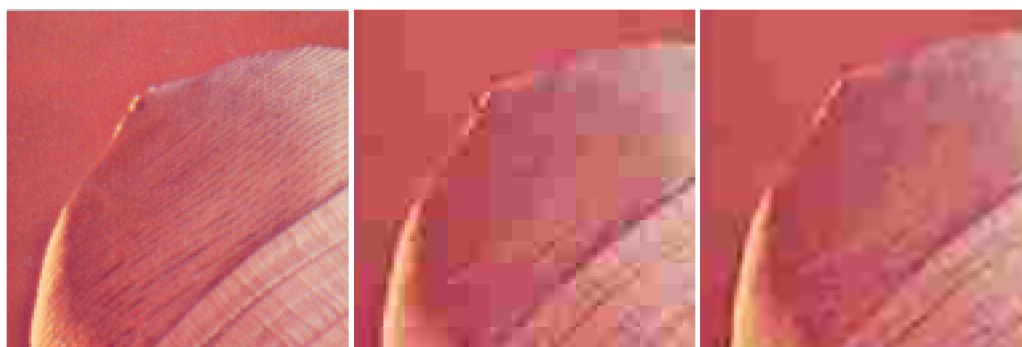


Obrázek 3.4: Porovnání trigonometrických transformací s datasetem obsahujícím umělé obrázky (DCT, DST, DHT a LDCT) dle metriky PSNR.



Obrázek 3.5: Diskrétní sinová transformace - artefakty.

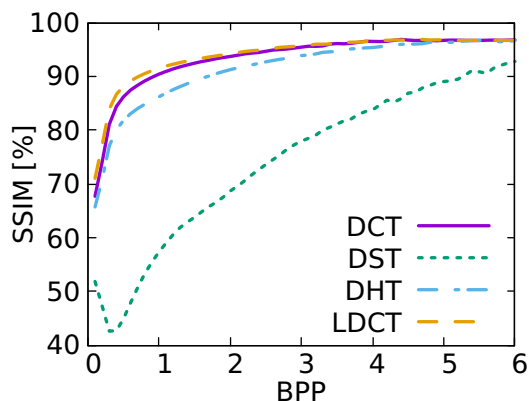
Dle výsledků v Obrázku 3.3 lze vyčíst, že diskretní sinová transformace má podstatně horší výsledky než referenční diskretní kosinová transformace. Při analýze všech 8 variant DST jsem došel k závěru, že nejlepší variantou pro kompresi obrazu je DST-VII. Tato varianta měla nejlepší výsledky ze všech variant a koncentrovala energii do levého horního rohu. Horší výsledky DST jsou zapříčiněny tvorbou artefaktů na hranicích bloků, které ve výsledném obraze tvoří mřížku, Obrázek 3.5. Tento artefakt je zapříčiněn kvantizací koeficientů, kdy dochází k redukci obrazových informací. Pokus o změnu pozic koeficientů (například bitová reverze posloupnosti indexů) neměla na redukci artefaktů velký efekt. K redukci tohoto artefaktu dochází až při nastavení vyšší kvality obrazu, tedy, kde je menší měra kvantování koeficientů. Z důvodu tvorby artefaktů a špatným výsledkům jak u obrázků umělých, tak i u obrázků reálných, není diskretní sinová transformace vhodná jako náhrada za DCT ve formátu JPEG.



Obrázek 3.6: Lokální DCT - blokové artefakty. Originální obrázek (vlevo), DCT (střed), LDCT (vpravo).

U diskretní Hartleyho transformace bylo použito přeuspořádání koeficientů, aby více odpovídaly uspořádání podle DCT. Toto přeuspořádání je více vysvětleno v Sekci 2.2.5. Avšak dle výsledků v Obrázku 3.3 lze vyčíst, že i přes toto uspořádání má diskretní Hartleyho transformace horší výsledky u reálných obrázků než DCT. U umělých obrázků lze vidět mírné zlepšení, avšak DCT nepřekonává. Důvodem špatných výsledků je tvorba blokových artefaktů i při vyšším datovém toku, kdy už u DCT nejsou blokové artefakty viditelné.

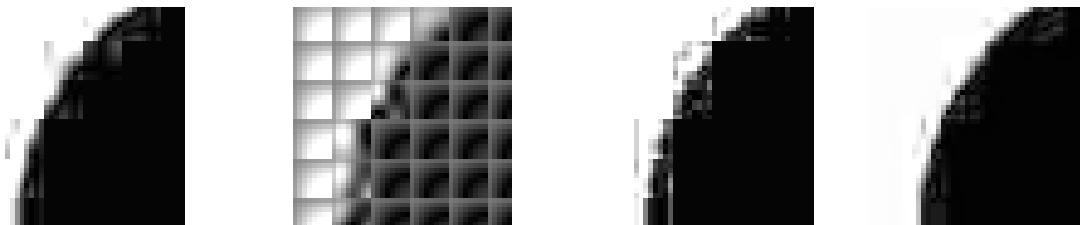
Dle výsledků na reálných obrázcích u lokální diskretní kosinové transformace v Obrázku 3.3 lze vidět, že při nižších bit ratech má LDCT lepší kvalitu obrazu než referenční DCT,



Obrázek 3.7: Porovnání trigonometrických transformací s datasetem obsahujícím reálné obrázky (DCT, DST, DHT a LDCT) za pomoci metriky SSIM.

avšak při vyšších bit ratech je kvalita obrazu přibližně stejná jako u DCT. Lepší výsledky LDCT jsou způsobeny předzpracováním vstupních hodnot, čímž dochází k zajištění spojitosti mezi jednotlivými bloky a tím k redukci blokových artefaktů, které jsou typické pro DCT, a to zvláště při nižších kvalitách obrazu. Příklad redukce blokových artefaktů lokální DCT oproti DCT je zobrazena na Obrázku 3.6. Avšak zatímco u reálných obrázků jsou vidět lepší výsledky u LDCT při nižší kvalitě, tak u umělých obrázků na Obrázku 3.4 je vidět, že již toto zlepšení není až tak znatelné.

Při použití jiné metriky SSIM, která bere v úvahu vnímání lidského oka, je na Obrázku 3.7 vidět, že lokální DCT má výrazně lepší výsledky než DCT a oproti metrice PSNR je vidět, že diskrétní kosinovou transformaci překonává i při vyšším datovém toku. Diskrétní Hartleyho transformace má dle metriky SSIM o dost horší výsledky a diskrétní sinová transformace má i podle metriky SSIM nejhorší výsledky.



Obrázek 3.8: Ukázky tvorby artefaktů u trigonometrických transformací (zleva: DCT, DST, DHT, LDCT).

Na Obrázku 3.8 jsou ukázky tvorby artefaktů na hraně objektu při nižší kvalitě obrazu. Na těchto ukázkách lze vidět u DCT, že dochází k mírné ztrátě jasnosti okrajů hran a k jejich částečnému rozmazání. U diskrétní sinové transformace dochází při nižší kvalitě obrazu k výrazné tvorbě artefaktů na hranách bloků, a tudíž i k nečitelnosti obrazu jako celku. Na vzorku DHT transformace lze vidět výraznou tvorbu blokových artefaktů na hraně objektu, je zde výraznější ztráta jasnosti okrajů hran než je u DCT. Naopak lokální diskrétní kosinová transformace má i přes nižší kvalitu výrazně čitelnější okraje hran než jsou u DCT.

3.2 Diskrétní vlnkové transformace

Další skupina transformací, která by byla vhodná jako náhrada DCT jsou diskrétní vlnkové transformace. Tyto transformace pracují s obrazem jako celkem oproti DCT, která je aplikována na bloky 8×8 . Z tohoto důvodu dochází k odstranění blokových efektů na hranici bloků. Vlnkovou transformaci, kterou jsem zvolil je Cohen-Daubechies-Feauveau. Tato transformace je využita i ve standardu JPEG 2000, který byl vytvořen jako náhrada za standard JPEG. JPEG 2000 standard využívá konkrétně Cohen-Daubechies-Feauveau 5/3 pro bezztrátovou kompresi obrazu a Cohen-Daubechies-Feauveau 9/7 pro ztrátovou kompresi obrazu. Obě z těchto transformací jsem se rozhodl nahradit namísto diskrétní kosinové transformace. Pro výpočet koeficientů jsem využil 1D lifting schéma aplikované po řádcích a následně po sloupcích celého obrazu pro CDF 5/3 a CDF 9/7. Transformace je dále aplikována ještě dvakrát, pokaždé na části s nízkými frekvencemi. Pro uložení koeficientů do bloků 8×8 jsou polohy koeficientů zaměněny za pomoci bitové reverze jak po řádcích, tak i po sloupcích, čímž se přesunou do levého horního rohu nízké frekvence.

Další možnou transformací je modifikace CDF 5/3 a CDF 9/7. Jednou z těchto modifikací je red-black transformace (neseparabilní transformace), která zpracovává obraz za pomoci red-black lifting schématu, jež zpracovává obraz ve 2D. Tato transformace je též dále aplikována dvakrát na části s nízkými frekvencemi. Stejně jako u separabilní CDF 5/3 a CDF 9/7 se provede záměna poloh koeficientů.

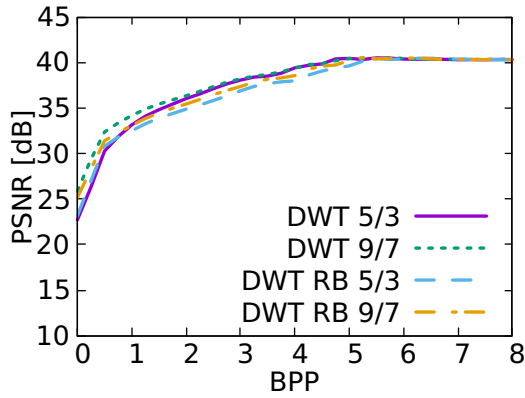
Další modifikací CDF 5/3 a CDF 9/7 je využití separabilní 1D lifting schéma CDF 5/3 a CDF 9/7, kde dochází k průchodu lifting schéma jak na části s nízkými frekvencemi, tak i na části s vysokými frekvencemi.



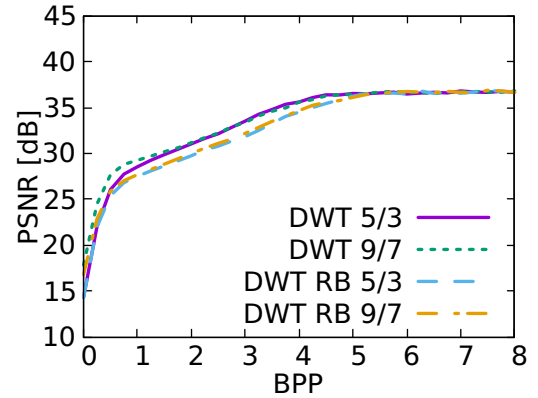
Obrázek 3.9: Porovnání tvorby artefaktů na hranách objektů u neseparabilní CDF 9/7 (vlevo) a separabilní CDF 9/7 (vpravo) na reálném obrázku.

Dle naměřených výsledků v Obrázku 3.10 a Obrázku 3.11 lze vidět, že separabilní CDF 5/3 a CDF 9/7 mají lepší výsledky než neseparabilní, a to jak u reálných obrázků, tak i u umělých obrázků. Horší výsledky neseparabilní CDF 9/7 jsou způsobeny tvorbou artefaktů obzvláště na hranách objektů, kde se tvoří skvrny, zatímco u separabilní CDF 9/7 je vidět pouze rozmazání v jedné dimenzi jako v Obrázku 3.9.

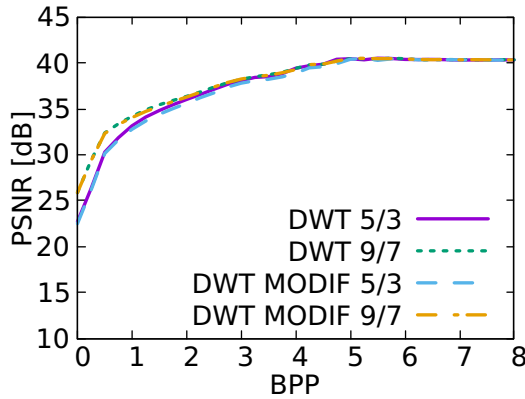
Na Obrázku 3.12 a Obrázku 3.13 je vidět, že u reálných obrázků má přibližně stejné výsledky jak separabilní, tak i modifikace separabilní CDF 9/7. Avšak u umělých obrázků



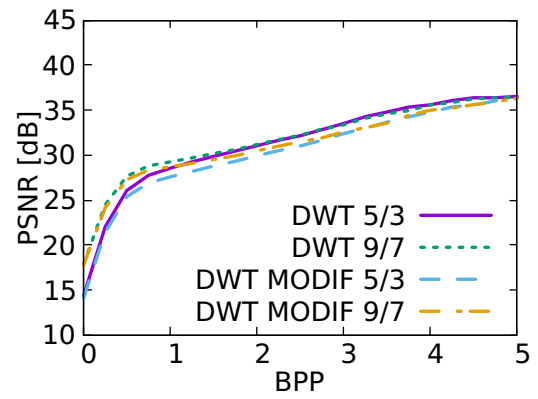
Obrázek 3.10: Porovnání separabilní CDF 5/7 a 9/7 a neseperabilní CDF 5/7 a 9/7 s datasetem obsahujícím reálné obrázky dle metriky PSNR.



Obrázek 3.11: Porovnání separabilní CDF 5/7 a 9/7 a neseperabilní CDF 5/7 a 9/7 s datasetem obsahujícím umělé obrázky dle metriky PSNR.



Obrázek 3.12: Porovnání separabilní CDF 5/7 a 9/7 a modifikací CDF 5/7 a 9/7 s datasetem obsahujícím reálné obrázky dle metriky PSNR.



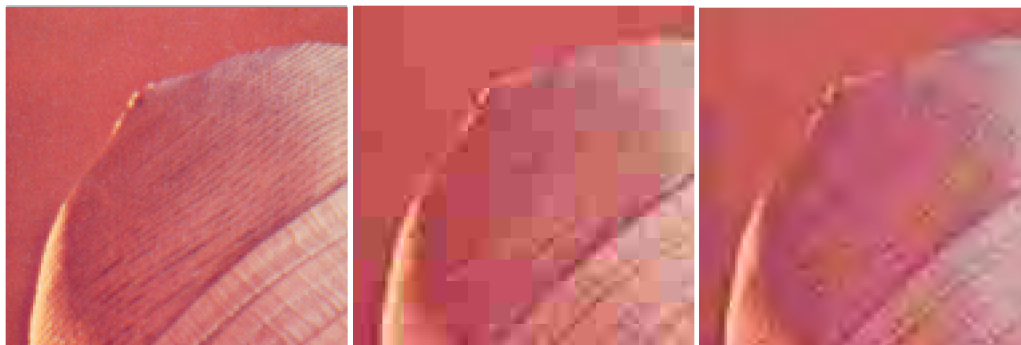
Obrázek 3.13: Porovnání separabilní CDF 5/7 a 9/7 a modifikací CDF 5/7 a 9/7 s datasetem obsahujícím umělé obrázky dle metriky PSNR.

je lepší pouze separabilní CDF 9/7. CDF 9/7 vždy vykazovala lepší výsledky než CDF 5/3. Tudiž z testovaných vlnkových transformací vychází celkově nejlépe separabilní CDF 9/7.

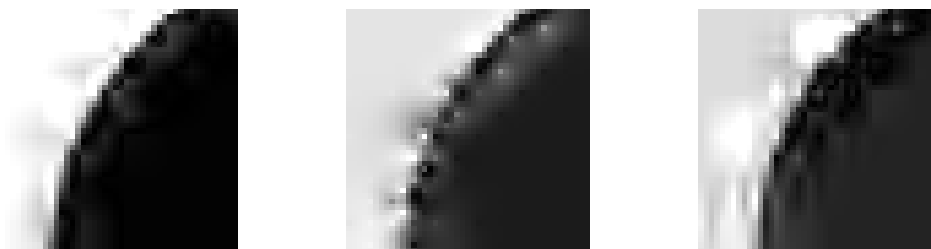
Na Obrázku 3.14 lze vidět, jak diskretní vlnková transformace dokáže redukovat blokové artefakty u nízkých kvalit obrázků oproti diskretní kosinové transformaci. Tato redukce je zajištěna tím, že diskretní vlnková transformace zpracovává obraz jako celek oproti blokovému zpracování DCT.

Na Obrázku 3.15 a Obrázku 3.16 jsou ukázky tvorby artefaktů na hraně objektu u vlnkových transformací při nižší kvalitě obrazu. U všech vzorků vlnkových transformací lze vidět, že dochází k rozmazání hran u objektu, avšak u separabilní CDF 5/3 a CDF 9/7 i jejich modifikací jsou stále čitelné okraje hran, ale u neseperabilní CDF 5/3 a CDF 9/7 již dochází ke ztrátě čitelnosti hran.

Při použití metriky SSIM na vlnkové transformace lze na Obrázku 3.17 a Obrázku 3.18 vidět, že mají obdobné výsledky jako při použití metriky PSNR. Tedy stále vychází nejlépe separabilní CDF 9/7.



Obrázek 3.14: Vlnkové transformace - blokové artefakty. Originální obrázek (vlevo), DCT (střed), CDF 9/7 (vpravo).

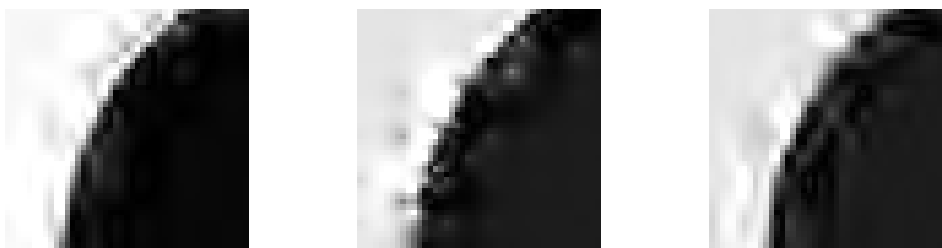


Obrázek 3.15: Ukázky tvorby artefaktů u vlnkových transformací CDF 5/3 (zleva: CDF 5/3, CDF 5/3 RB, CDF 5/3 modifikace).

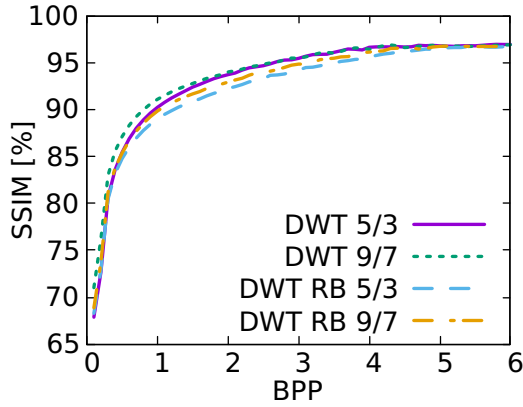
3.3 Polynomiální transformace

Další skupina transformací, která by mohla nahradit DCT jsou polynomiální transformace. Jednou z těchto transformací je diskretní Chebyshevova transformace. Diskretní Chebyshevova transformace je odvozena z Chebyshevových polynomů, stejně jako diskretní kosinová transformace, což motivuje k použití diskretní Chebyshevovy transformace jako náhrady za diskretní kosinovou transformaci pro formát JPEG. Bázová matice diskretní Chebyshevovy transformace je vyjádřena za pomoci Chebyshevových momentů. DChT je stejně jako DCT aplikována po blocích 8×8 .

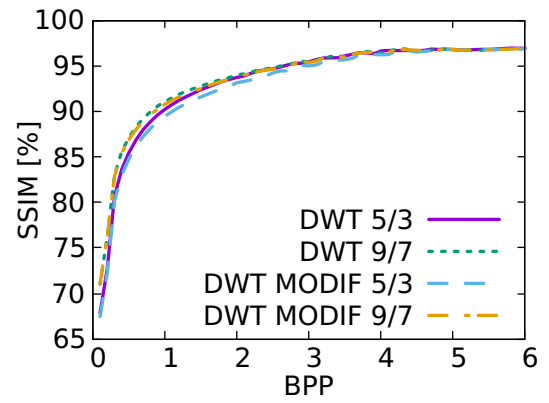
Z výsledků vyobrazených v Obrázku 3.19 a Obrázku 3.20 lze vyčíst, že diskretní Chebyshevova transformace je přibližně stejná jako DCT, pouze v některých částech grafu je mírně horší než DCT. Při testování na jednotlivých obrázcích bylo zjištěno, že DChT má lepší vlastnosti u obrázků s větším množstvím ostrých hran. Tato transformace má stejné



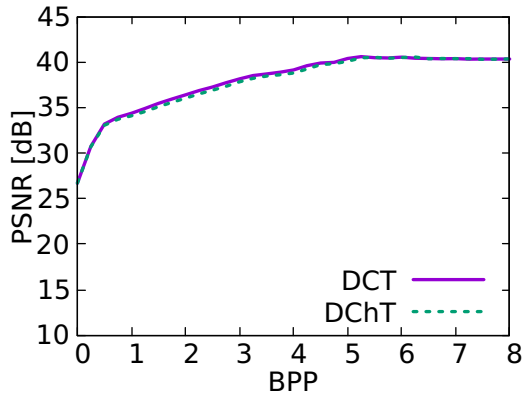
Obrázek 3.16: Ukázky tvorby artefaktů u vlnkových transformací CDF 9/7 (zleva: CDF 9/7, CDF 9/7 RB, CDF 9/7 modifikace).



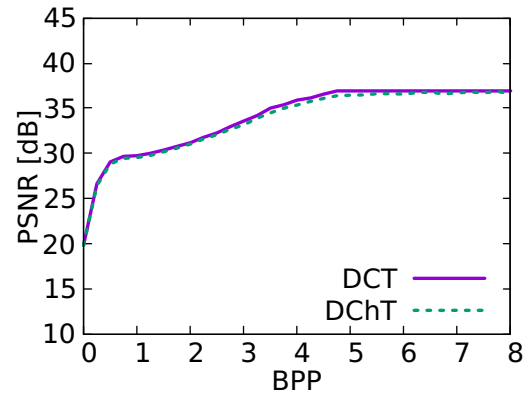
Obrázek 3.17: Porovnání separabilní CDF 5/7 a 9/7 a neseperabilní CDF 5/7 a 9/7 s datasetem obsahujícím reálné obrázky za pomoci metriky SSIM.



Obrázek 3.18: Porovnání separabilní CDF 5/7 a 9/7 a modifikací CDF 5/7 a 9/7 s datasetem obsahujícím reálné obrázky za pomoci metriky SSIM.



Obrázek 3.19: Porovnání DCT a DChT s datasetem obsahujícím reálné obrázky.



Obrázek 3.20: Porovnání DCT a DChT s datasetem obsahujícím umělé obrázky.

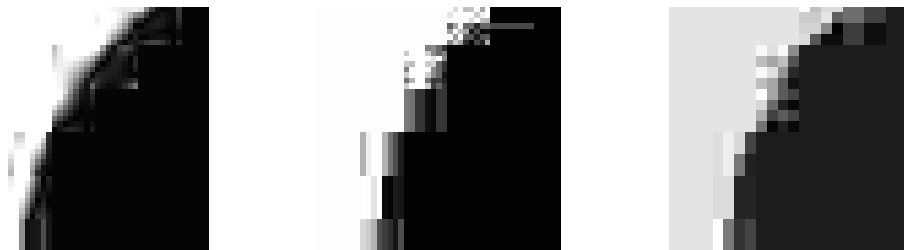
vlastnosti i na hranách objektu jako DCT, což je možno vidět na Obrázku 3.21 u DChT, že také dochází k mírné ztrátě jasnosti okrajů hran a k částečnému rozmazání.

3.4 Walshova-Hadamardova a mapped real transformace

Walshova-Hadamardova transformace Další možnou transformací je Walshova-Hadamardova transformace. Tato transformace má výhodu v rychlosti výpočtu koeficientů, jelikož veškeré výpočty jsou prováděny pouze nad celými čísly a jsou zapotřebí pouze operace sčítání a odčítání, jelikož báze matice obsahuje pouze hodnoty $+1$ a -1 .

Na výsledku Walshovy-Hadamardovy transformace v Obrázku 4.1 a Obrázku 4.2 lze vidět, že není lepší než referenční diskretní kosinová transformace, a to jak při použití na reálných obrázcích, tak i na umělých. Horší výsledky jsou způsobeny tvorbou výraznějších blokových artefaktů, a to obzvláště při nižší kvalitě obrazu. Jedinou výhodou této transformace je rychlost jejího výpočtu oproti DCT, avšak jako náhrada DCT není vhodná. Na

Obrázku 3.21 lze vidět, že při použití WHT jsou na hranách objektu dosti znatelné blokové artefakty a hrany objektu nejsou jasně určitelné.



Obrázek 3.21: Ukázky tvorby artefaktů u DChT (vlevo), SMRT (střed) a WHT (vpravo).

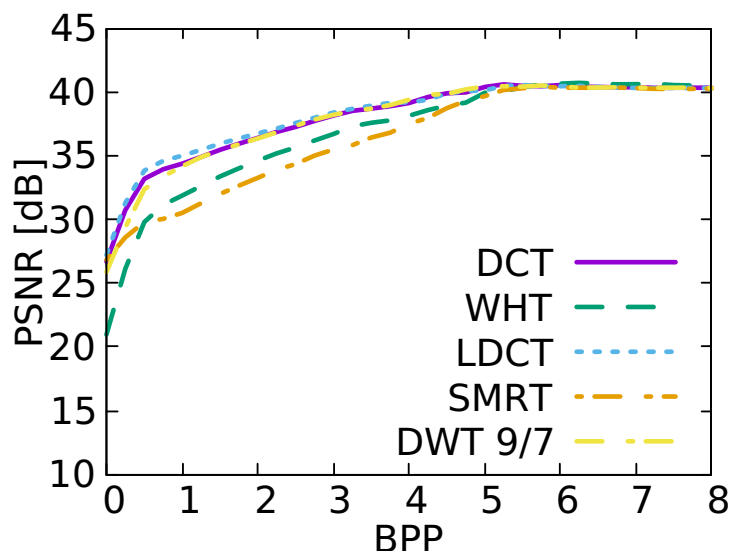
Mapped real transformace Bázové matice Mapped real transformace obsahuje pouze hodnoty $+1$, -1 a 0 , tudíž lze vypočítat koeficienty pouze za pomoci celých čísel a operací sčítání a odčítání. Toto chování je dosti podobné Walshově-Hadamardově transformaci, avšak MRT není až tak efektní, jelikož při výpočtu MRT koeficientů je značná část koeficientů redundantních nebo vždy nulových hodnot. Tuto transformaci vylepšují metody unique MRT, která odstraňuje redundantní data a SMRT, která rozšiřuje UMRT seřazením koeficientů. Jelikož ani SMRT neuspořádává koeficienty podobně jako jsou uloženy DCT koeficienty, bylo zapotřebí toto uspořádání mírně pozměnit. Tato změna je více vysvětlena v Sekci 2.6.

Z výsledku v Obrázku 4.1 a Obrázku 4.2 je vidět, že je SMRT transformace výrazně horší než referenční DCT. To je způsobeno výraznými blokovými artefakty, které se objevují hlavně na hranách objektu, což je možno vidět na Obrázku 3.21, kde u SMRT transformace dochází ke ztrátě přesnosti umístění hrany objektu.

Kapitola 4

Shrnutí výsledků

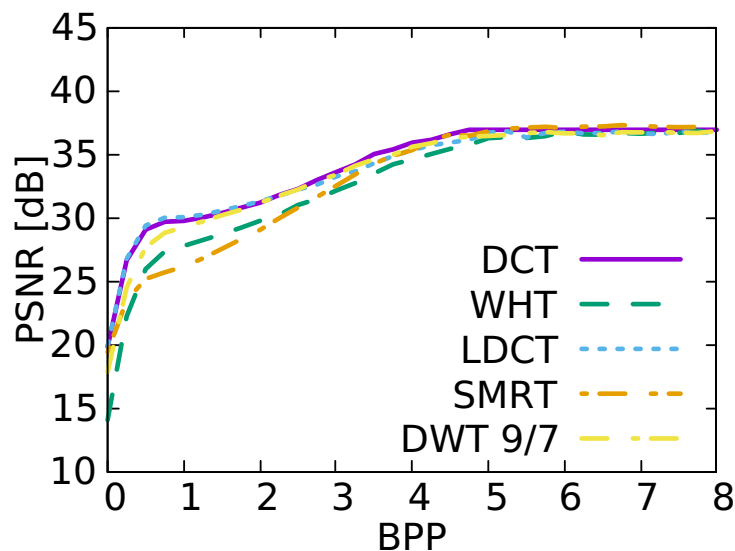
V této sekci je probráno pouze několik vhodných transformací, které bylo možné implementovat namísto DCT v JPEGu. Z testování trigonometrických transformací vychází nejlépe, kromě diskretní kosinové transformace, ještě její modifikace lokální diskretní kosinová transformace, která měla lepší kvalitu obrazu při nižším datovém toku než DCT a která při nižší kvalitě obrazu redukuje blokové artefakty.



Obrázek 4.1: Shrnutí s datasetem obsahujícím reálné obrázky.

Z vlnkových transformací dopadla nejlépe separabilní CDF 9/7, ovšem při srovnání této transformace s DCT v Obrázku 4.1 lze vidět, že DCT má lepší výsledky, avšak při vyšším datovém toku je kvalita obrazu přibližně totožná. Přesto při testování separabilní CDF 9/7 na jednotlivých obrázcích vykazovala CDF 9/7 v určitých případech mírně lepší výsledky než DCT. Lepší výsledky se především objevovaly u obrázků, kde převažovaly větší počty hran. U těchto obrázků měla vlnková transformace lepší vlastnosti při vyšším datovém toku.

Z výsledků testování diskretní Chebyshevovy transformace lze vidět, že se jako náhrada DCT nehodí, jelikož má skoro stejné výsledky jako DCT. Stejně jako DChT, tak i Walshova-Hadamardova transformace se nehodí jako náhrada DCT, avšak tato transformace má oproti DCT výhodu v rychlosti výpočtu koeficientů.

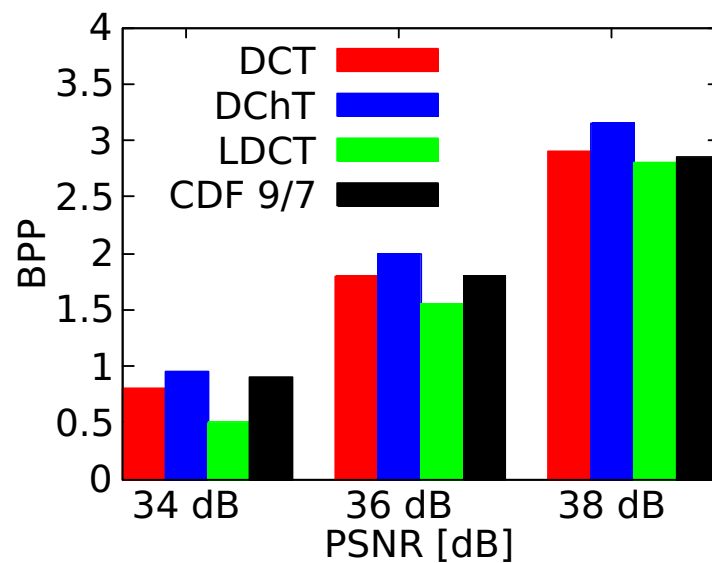


Obrázek 4.2: Shrnutí s datasetem obsahujícím umělé obrázky.

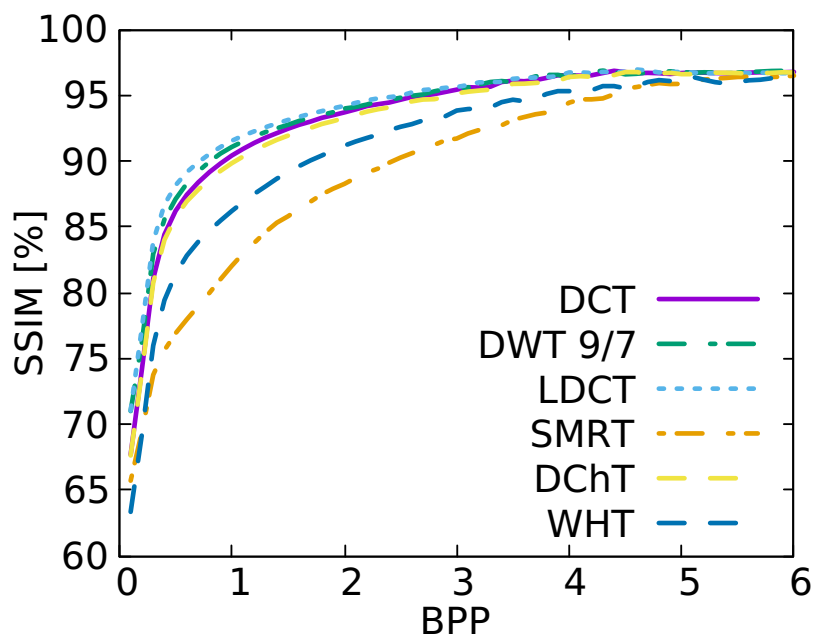
Na Obrázku 4.3 je možno porovnat velikost datového toku pro některé úrovně PSNR. Jak lze vidět, tak pro nižší kvalitu obrazu by na disku zabíral podstatně méně místa obrázek komprimován za pomoci transformace LDCT. Z vyobrazených by nejvíce zabíral obrázek místo komprimován diskretní Chebyshevovou transformací.

Testování těchto transformací bylo provedeno za pomoci metriky PSNR, což je metoda, která nebere v úvahu vnímání lidského vidění. Při použití metriky SSIM, která bere v potaz lidské vnímání scény, lze vidět na Obrázku 4.4, že lokální diskretní kosinová transformace vychází podstatně lépe než referenční DCT. Lepší než DCT se navíc ukazuje být i separabilní CDF 9/7, i když ne až tak dobře jako LDCT. Diskretní Chebyshevova transformace má dle metriky SSIM přibližně stejné výsledky jako DCT. Značně horší výsledky oproti referenční DCT transformaci má SMRT transformace.

Výsledky této práce byly publikovány ve sborníku konference Excel@FIT 2017 [33] i ve sborníku konference SCCG 2017 [34]. Doprovodný software je možno stáhnout z [32].



Obrázek 4.3: Ukázka hodnot datového toku pro některé úrovně PSNR s datasetem obsahujícím reálné obrázky.



Obrázek 4.4: Shrnutí s datasetem obsahujícím reálné obrázky za pomoci metriky SSIM.

Kapitola 5

Závěr

Tato práce pojednává o použití některých transformací, které lze nahradit namísto DCT ve standardu JPEG. Jednalo se o transformace ze skupiny diskrétních trigonometrických transformací, diskrétních vlnkových transformací a polynomiálních transformací. Tyto transformace byly implementovány do knihovny libjpeg a testovány na setu obrázků. Výsledky z každé transformace byly poté hodnoceny vůči referenční diskrétní kosinové transformaci, zda by se uplatnily jako náhrada za tuto transformaci.

Při porovnání všech zkoumaných transformací dle metriky PSNR byla nalezena jediná lokální diskrétní kosinová transformace, která překonala DCT, znatelně však pouze při nižším datovém toku. Také se ukázalo, že tato transformace redukuje blokové artefakty, které jsou pro DCT typické. Redukovat blokové artefakty dokázaly i vlnkové transformace, avšak nedokázaly překonat DCT, pouze při vyšším datovém toku vykazovala separabilní CDF 9/7 stejné výsledky jako DCT. Avšak dle metriky SSIM měly jak lokální diskrétní kosinová transformace, tak i separabilní CDF 9/7 lepší výsledky než DCT, tudíž pro lidské oko jsou více přijatelnější tyto transformace. Tyto transformace překonávají DCT jak při nízkém datovém toku, tak i při vyšším datovém toku.

Za pomoci těchto výsledků se mi podařilo nalézt transformaci, která by dokázala nahradit diskrétní kosinovou transformaci a tou je její modifikovaná verze lokální diskrétní kosinová transformace. Tato transformace dokáže též značně redukovat tvorbu blokových artefaktů, které jsou typické pro diskrétní kosinovou transformaci. Další, i když méně vhodné transformace, jsou separabilní CDF 9/7, která překonává DCT pouze z pohledu porovnání dle lidského vidění a která také dokáže redukovat blokové artefakty jako LDCT, a diskrétní Chebyshevova transformace, která sice diskrétní kosinovou transformaci nepřekonává, avšak má přibližně stejné výsledky jako DCT.

Vzhledem k existenci mnoha dalších transformací, kterými lze diskrétní kosinovou transformaci v JPEGu nahradit, nabízí se možnost zabývat se touto problematikou i do budoucna. Možné by bylo pokračovat v polynomiálních transformacích, například diskrétní Zolotarevovu transformací. Další alternativou by mohlo být pokračování v transformacích s přesahem bloku jako lapped biorthogonal transformace nebo použitím jiné vlnky v diskrétní vlnkové transformaci nebo aplikování stejného předzpracování, jaké je použito u LDCT na jiné blokově založené transformaci, například na diskrétní Chebyshevově transformaci. Další pokračování této práce by se mohlo také zabývat optimalizací kvantizačních tabulek pro jednotlivé transformace.

Literatura

- [1] *Standard JPEG: ISO/IEC 10918-1:1994.*
- [2] *Standard JPEG XR: ISO/IEC 29199-2:2010.*
- [3] *ITU-T Recommendation T.81. Information technology – Digital compression and coding of continuous-tone still images –Requirements and guidelines.* 1992.
- [4] *ITU-T Recommendation T.800. Information technology – JPEG 2000 image coding system: Core coding system.* 2000.
- [5] *ITU-T Recommendation T.832. Information technology – JPEG XR image coding system – Image coding specification.* 2009.
- [6] Aharoni, G.; Averbuch, A.; Coifman, R.; aj.: *Local cosine transform - A method for the reduction of the blocking effect in JPEG.* *Journal of Mathematical Imaging and Vision, Special Issue on Wavelets*, ročník 3, 1993: s. 7–38, ISSN 0924-9907.
- [7] Angelopoulou, M. E.; Cheung, P. Y. K.: *Implementation and comparsion of the 5/3 lifting 2D discrete wavelet transform computation schedules on FPGAs.* *Journal of VLSI signal processing*, ročník 51, 2008: s. 3–5, ISSN 1939-8018.
- [8] Anisimova, E.; Bednář, J.; Páta, P.: *Zpracování obrazu pomocí vlnkové transformace.* *Electro revue*, ročník 15, 2013: str. 238, ISSN 1213-1539.
- [9] Babić, D.; Kovač, M.: *Polynomial transform based DCT implementation.* In *Student contest proc. of the 4th Electronic circuits and systems conference*, 2003, s. 5–9.
- [10] Bankoski, J.; Koleszar, J.; Quillio, L.; aj.: *Doporučení WebP: RFC 6386.*
- [11] Choge, H. K.; Oyama, T.; Karungaru, S.; aj.: *Palmprint Recognition Based on Local DCT Feature Extraction.* In *International Conference on Neural Information Processing: Neural Information Processing*, 2009, ISBN 978-3-642-10677-4, s. 639–648.
- [12] Cintra, R. J.; Bayer, F. M.: *A DCT approximation for image compression.* *IEEE Signal Processing Letters*, ročník 18, 2011: s. 579 – 582, ISSN 1070-9908.
- [13] Corr, P.; Stewart, D.; Hanna, P.; aj.: *Discrete Chebyshev transform. A natural modification of the DCT.* In *Proceedings 15th International Conference on Pattern Recognition*, 2000, ISBN 0-7695-0750-6, s. 1142–1145.
- [14] Coutinho, V. A.; Cintra, R. J.; Bayer, F. M.; aj.: *Low-complexity pruned 8-point DCT approximations for image encoding.* In *25th International conference on electronics, communications and computers (CONIELECOMP 2015)*, 2015, ISBN 978-1-4799-7436-8, s. 1–10.

- [15] Feilner, M.; Ville, D. V. D.; Unser, M.: *An orthogonal family of quincunx wavelets with continuously-adjustable order. IEEE transactions on image processing*, ročník 14, 2004: str. 3, ISSN 1057-7149.
- [16] Franzen, R.: *Kodak lossless true color image suit*.
- [17] G. Plonka, M. T.: *Split-radix algorithms for discrete trigonometric transforms. Preprint, Gerhard Mercator Univ. Duisburg*, 2002: s. 1–2.
- [18] Hunt, O.; Mukundan, R.: *A comparison of discrete orthogonal basis functions for image compression*. In *Proceedings conference on image and vision computing New Zeland (IVCNZ)*, 2004, s. 53–58.
- [19] I. Daubechies, W. S.: *Factoring wavelet transforms into lifting steps. The Journal of Fourier Analysis and Applications*, ročník 4, 1998: str. 247–269, ISSN 1531-5851.
- [20] Janík, J.; Špetík, R.; Sovka, P.; aj.: *Introducing the discrete Zolotarev cosine transform*. Technická zpráva, Department of circuit theory, Faculty of electrical engineering, CTU in Prague, 2010.
- [21] M. E. Angelopoulou, P. Y. K. C.: *Implementation and comparison of the 5/3 lifting 2D discrete wavelet Transform Computation Schedules on FPGAs*. 2008, iSSN: 1939-8018.
- [22] M. El-Sharkawy, W. E.: *A fast recursive pruned DCT for image compression applications*. In *Proceedings of 1994 37th Midwest symposium on circuits and systems*, 1994, ISBN 0-7803-2428-5, s. 887–891.
- [23] Mallat, S.: *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Elsevier, třetí vydání, 2008, ISBN 978-0-12-374370-1, 805 s.
- [24] Manjin, B.; Jaya, V.; Meenakshy, K.; aj.: 8×8 SMRT based texture descriptors. In *Lecture notes on software engineering*, ročník 3, 2015, ISSN 2301-3559, s. 295–297.
- [25] Martucci, S. A.: *Symmetric convolution and the discrete sine and cosine transforms. IEEE transactions on signal processing*, ročník 42, 2002: str. 1050, ISSN 1053-587X.
- [26] Olmos, A.; Kingdom, F. A. A.: *A biologically inspired algorithm for the recovery of shading and reflectance images*. 2004.
- [27] P. Basu, R. G., V Bhadrán: *A new algorithm to compute forward and inverse 2-D UMRT for N - a power of 2*. In *2012 International conference on power, signals, controls and computation*, 2012, ISBN 978-1-4673-0446-7, s. 233–237.
- [28] Publicdomainvectors: [Online; navštíveno 01.05.2017].
URL <https://publicdomainvectors.org/>
- [29] Roy, R.: *Development of a new transform: MRT*. Dizertační práce, Division of eletronics engineering, Cochin university of science and technology, 2009.
- [30] Salomon, D.: *Data compression the complete reference*. Springer, třetí vydání, 2004, ISBN 0-387-40697-2, 898 s.

- [31] Singh, V. K.; Gupta, S.; Dalal, U. D.: *Performance comparsion of discrete Hartley transform (DHT) and fast Fourier transform (FFT) OFDM system in AWGN channel. International journal of computer applications*, ročník 70, 2013: s. 1–3, ISSN 0975-8887.
- [32] Svoboda, S.: [Online; navštíveno 15.05.2017].
URL https://github.com/stanleys92/new_transforms_JPEG
- [33] Svoboda, S.: *Nové transformace pro formát JPEG*. In *Excel@FIT*, 2017.
- [34] Svoboda, S.; Bařina, D.: *New transforms for JPEG format*. In *Spring Conference on Computer Graphics (SCCG 2017)*, 2017.
- [35] Turoň, V.: *Popis metod spektrální analýzy založené na Zolotarevových polynomech*. Dizertační práce, České vysoké učení technické v Praze, 2016.
- [36] Uytterhoeven, G.; Bultheel, A.: *The red-black wavelet transform*. 1997.
- [37] V.L. Jaya, R. G.: *Fuzzy rule based enhancement in the SMRT domain for low contrast images*. In *International conference on information and communication technologies (ICICT 2014)*, ročník 46, 2015, s. 1747–1753.
- [38] Yim, W.; Coakley, F.: *Polyphase matrix and lattice decomposition for multirate filters and filter banks*. In *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1992, ISBN 0-7803-0532-9, str. 1.